9. kursusgang: Determinanter

<u>Sætning</u>: Matricen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ er inverterbar hvis og kun hvis $ad-bc \neq 0$ og

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

<u>Bevis</u>:

$ad-bc \neq 0$: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ OK

($ad-bc=0$: Hvis $b=0$ er $ad=0$ så $a=0$ eller $d=0$. Dermed har $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ en nul-række eller nul-søjle så dens RREF er ikke I_2.

Hvis $b \neq 0$ fås $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{-br_2 \to r_2} \begin{bmatrix} a & b \\ -bc & -bd \end{bmatrix} \xrightarrow{dr_1+r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

så RREF er ikke I_2 OK) q.e.d.

<u>Def.</u> Determinanten af en 2×2-matrix er defineret som

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc.$$

<u>Eks</u>: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\det(A) = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2 \neq 0$.

Så A er inverterbar med $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Determinanten af en 1×1-matrix defineres som $\det([a]) = a$.

Vi vil nu give en rekursiv definition af determinanten for en $n\times n$-matrix $A = [a_{ij}]$.

Lad A_{ij} være $(n-1)\times(n-1)$-matricen der fremkommer ved at slette række nr. i og søjle nr. j i A.

Den (i,j)'te <u>kofaktor</u> af A er tallet

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij}).$$

<u>Def.</u> Determinanten af en $n\times n$-matrix $A=[a_{ij}]$ er tallet

$$\det(A) = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + \dots + a_{1n}c_{1n}.$$

Bemærk: Fortegnet $(-1)^{i+j}$ er bestemt ved

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \\ - & + & - & + & \\ & \cdots & & & \end{bmatrix}$$

Eks. 2×2- matricer

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11}\det([a_{22}]) - a_{12}\det([a_{21}]) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

som før OK.

Eks. 3×3 - matricer

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Eks.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 = 1\cdot(-2) - 5\cdot 0 = -2$$

Sætning: Lad $A = [a_{ij}]$ være en $n\times n$-matrix. Determinanten af A kan beregnes ved udvikling efter $i$te række,

$$\det(A) = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \dots + a_{in}c_{in}$$

og ved udvikling efter $j$te søjle,

$$\det(A) = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \dots + a_{nj}c_{nj}.$$

(Bevis udeladt)

Eks. Ved udvikling efter 3. søjle fås

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 0 = -2$$

Def. En $n\times n$-matrix $B = [b_{ij}]$ siges at være

- øvre triangulær såfremt $b_{ij} = 0$ for $i > j$
- nedre triangulær såfremt $b_{ij} = 0$ for $i < j$

Eks:
$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

øvre triangulær   nedre triangulær   øvre triangulær

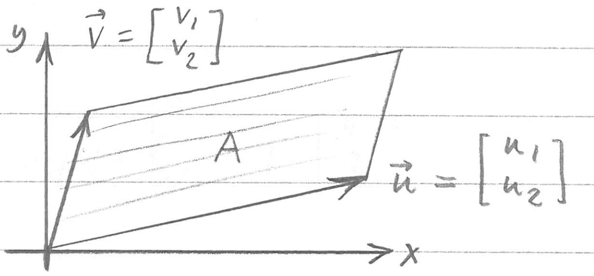
Ved udvikling efter søjler henholdsvis rækker fås:

Sætning:

Determinanten af en øvre eller nedre triangulær matrix er lig produktet af diagonal indgangene.

Eks
$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-1) = -10$$

Determinantens geometriske betydning



Arealet af parallelogrammet frembragt af $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er

$$A = \left| \det\left(\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} \right) \right|.$$

Rumfanget af parallelepipedet i $\mathbb{R}^3$ frembragt af

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \text{ er}$$

$$V = \left| \det\left(\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \right) \right|.$$

(beviser udeladt)

Bemærkning: Man kan vise at beregning af determinanten af en $n \times n$-matrix ved kofaktor udvikling kræver $\sim e \cdot n!$ aritmetiske regneoperationer. Så metoden er voldsomt tidskrævende for større matricer. Heldigvis kan determinanter også beregnes via Gauss elimination

Sætning: Lad A være en $n \times n$-matrix.

(1) Hvis $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$; $i \neq j$ så er $\det(B) = -\det(A)$.

(2) Hvis $A \xrightarrow{kr_i \to r_i} B$; $k \neq 0$ så er $\det(B) = k \cdot \det(A)$.

(3) Hvis $A \xrightarrow{cr_i + r_j \to r_j} B$; $i \neq j$ så er $\det(B) = \det(A)$.

(Bevis udeladt)

Eks. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & -9 & 2 \\ -4 & 4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[4r_1 + r_3 \to r_3]{3r_1 + r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 16 & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 16 & -18 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & -9 & 2 \\ -4 & 4 & -6 \end{bmatrix}\right) = -1 \cdot 16 \cdot (-7) = 112$$

Sætning: Hvis en $n \times n$-matrix A er rækkereduceret til en øvre triangulær matrix U uden brug af skaleringsoperationen, så er

$$\det(A) = (-1)^r u_{11} u_{22} \dots u_{nn}$$

hvor r er antal rækkeombytninger.