9. kursusgang: Repetition

Def. En afbildning $f: D \to E$ siges at være

- injektiv (eller en-til-en) såfremt
  $u \neq v \Rightarrow f(u) \neq f(v)$
- surjektiv (eller på) såfremt
  $f(D) = \{ f(x) \in E \mid x \in D \} = E$

Lad $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineær afbildning.

Def Kernen (eller nulrummet) for T er

$$\mathrm{Ker}(T) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid T(\vec{x}) = \vec{0} \}.$$

Sætning: T er injektiv hvis og kun hvis $\mathrm{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$.

Lad A være standard matricen for T (dvs. $T(\vec{x}) = A\vec{x}$).

Bemærk: $\mathrm{Ker}(T)$ er løsningsmængden til ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$.

Bemærk: Søjlevektorerne i A frembringer (udspænder) billedmængden $T(\mathbb{R}^n)$ idet

$$T(\vec{x}) = A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n \quad \text{så}$$
$$T(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Sp}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}.$$

Eks.

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Frembringere for billedmængden: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$.

Vi bestemmer $\mathrm{Ker}(T)$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}, \quad \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_2 \text{ fri} \end{cases},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

Dvs. $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Frembringere for kernen: $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

<u>Sætning</u>: Lad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være lineær med standard matrix A. Da gælder

(1) T er injektiv hvis og kun hvis
 A's søjler er lineært uafhængige
 (dvs. pivot position i hver søjle)

(2) T er surjektiv hvis og kun hvis
 A's søjler udspænder $\mathbb{R}^m$
 (dvs. pivot position i hver række)

<u>Sætning</u>: Antag at

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineær med std. matrix A,

$U : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ lineær med std. matrix B.

Da er

$U \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ lineær med std. matrix BA.

<u>Sætning</u>: Lad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være lineær med std. matrix A. Hvis A er inverterbar, så er T inverterbar og

$$T^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \, ; \; T^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x} .$$