12. kursusgang: Underrum, basis og dimension

Def. Et underrum W af $\mathbb{R}^n$ er en delmængde $W \subseteq \mathbb{R}^n$, der opfylder

(1) $\vec{0} \in W$

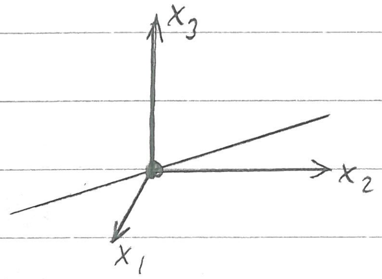
(2) $\vec{u} \in W, \vec{v} \in W \Rightarrow \vec{u}+\vec{v} \in W$ (lukket under addition)

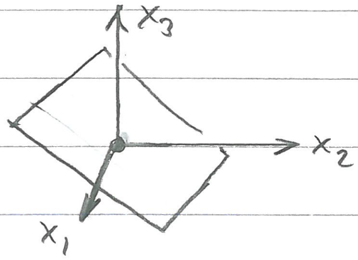
(3) $\vec{u} \in W, c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\vec{u} \in W$ (lukket under multiplikation med skalarer)

Eks.: $\mathbb{R}^n$ er et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Eks.: $\{\vec{0}\}$ er et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Eks: Linjer og planer gennem $(0,0,0)$ i $\mathbb{R}^3$ er underrum af $\mathbb{R}^3$.





Eks: $V = \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; v_1 \geq 0,\ v_2 \geq 0 \right\}$ er ikke et underrum af $\mathbb{R}^2$ idet $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in V$ men $(-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \notin V$.

Sætning: Lad $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k \in \mathbb{R}^n$. Da er

$$W = \mathrm{Sp}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\}$$

et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Bevis:

Husk at $\mathrm{Sp}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\} = \{c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2 + \dots + c_k\vec{w}_k \mid c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}\}$.

(1) $\vec{0} = 0\vec{w}_1 + 0\vec{w}_2 + \dots + 0\vec{w}_k \in W$ OK

(2) Antag at $\vec{u} \in W$ og $\vec{v} \in W$. Da findes koefficienter så

$\vec{u} = a_1\vec{w}_1 + a_2\vec{w}_2 + \dots + a_k\vec{w}_k$ og $\vec{v} = b_1\vec{w}_1 + b_2\vec{w}_2 + \dots + b_k\vec{w}_k$.

Dermed er

$$\vec{u}+\vec{v} = (a_1+b_1)\vec{w}_1 + (a_2+b_2)\vec{w}_2 + \dots + (a_k+b_k)\vec{w}_k \in W \quad \text{OK}$$

(3) $c\vec{u} = (ca_1)\vec{w}_1 + (ca_2)\vec{w}_2 + \dots + (ca_k)\vec{w}_k \in W$ for alle $c \in \mathbb{R}$. OK

q.e.d.

Eks. Vis at $W = \left\{ \begin{bmatrix} 2s-3t \\ t \\ -s+4t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$ er et underrum af $\mathbb{R}^3$.

$$W = \left\{ s \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\} = Sp\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}.$$

Dvs. W er underrummet i $\mathbb{R}^3$ frembragt af $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$.

Underrum hørende til matricer

Lad $A = [\vec{a}_1 \; \vec{a}_2 \; \dots \; \vec{a}_n]$ være en $m \times n$-matrix

Def. *Søjlerummet* for A er underrummet af $\mathbb{R}^m$, der er udspændt af A's søjlevektorer

$$Col(A) = Sp\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}.$$

Nulrummet for A er

$$Nul(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}.$$

Bemærk: $Col(A)$ er billedmængden og $Nul(A)$ er kernen for afbildningen $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$.

Sætning: $Nul(A)$ er et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Bevis: (1) $\vec{0} \in Nul(A)$ da $A\vec{0} = \vec{0}$ OK

(2) Antag at $\vec{u}, \vec{v} \in Nul(A)$. Da er

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

så $\vec{u} + \vec{v} \in Nul(A)$ OK

(3) Antag at $\vec{u} \in Nul(A)$ og $c \in \mathbb{R}$. Da er

$$A(c\vec{u}) = c(A\vec{u}) = c\vec{0} = \vec{0}$$

så $c\vec{u} \in Nul(A)$ OK

q.e.d.

Def. *Rækkerummet* $Row(A)$ er underrummet af $\mathbb{R}^n$ udspændt af A's rækkevektorer

---

Husk: En mængde af vektorer $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ i $\mathbb{R}^n$ siges at være <u>lineært uafhængig</u> såfremt ligningen

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

<u>kun</u> har løsningen $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \dots,\ x_k = 0.$

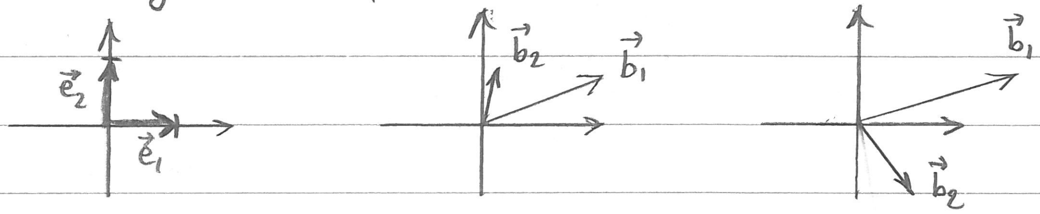
! <u>Def.</u>: Lad W være et underrum af $\mathbb{R}^n$. En <u>basis</u> for W er en mængde $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p\}$ af vektorer fra W, der opfylder

(1) $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p\}$ er lineært uafhængig

(2) $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p\}$ udspænder W, dvs. $W = Sp\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p\}$.

<u>Eks</u>: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$ kaldet <u>standard basen</u>

<u>Eks</u>: Forskellige baser for $\mathbb{R}^2$:



Ved 6. kursusgang så vi at pivot søjlerne i en matrix er lineært uafhængige og at ikke-pivot søjlerne er linearkombinationer af pivot søjlerne. Heraf følger

! <u>Sætning</u>: Lad A være en $m\times n$-matrix. Pivot søjlerne <u>i A</u> udgør en basis for $Col(A)$.

! <u>Bemærk</u>: En basis for $Nul(A)$ findes ved at løse ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$ via A's RREF, og skrive løsningen på parametriseret vektorform.

<u>Eks.</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$. Find baser for $Col(A)$ og $Nul(A)$.

Først beregnes A's RREF (mellemregninger udeladt)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser at søjle nr. 1 og nr. 3 i A er pivot søjler.

$Col(A)$ har basen $\underline{\underline{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}}}$.

Vi løser $A\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_2 \text{ fri} \\ x_3 = -3x_4 \\ x_4 \text{ fri} \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nul(A) har basen $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Bemærk: lineært uafhængige pga. rækkerne $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$. Dette sker automatisk.

Sætning (Udtynding til basis)

Lad $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} \neq \{\vec{0}\}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$ og lad $V = \mathrm{Sp}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$. Så kan S udtyndes til en basis for V ved at fjerne et antal (måske ingen) vektorer fra S.

Bevis:

Sæt $A = [\vec{v}_1 \; \vec{v}_2 \; \dots \; \vec{v}_k]$ så er $V = \mathrm{Col}(A)$ og pivot søjlerne udgør en basis for V. q.e.d.

Sætning (Udvidelse til basis)

Lad $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ være lineært uafhængige vektorer i et underrum V af $\mathbb{R}^n$. Så kan S udvides til en basis for V ved at tilføje et endeligt antal (måske ingen) vektorer fra V til S.

(Bevis udeladt)

Bemærk: Ethvert ikke-nul underrum $V \neq \{\vec{0}\}$ af $\mathbb{R}^n$ har en basis.

Bevis: Vælg et $\vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ og udvid $S = \{\vec{v}\}$ til en basis. q.e.d.