13. kursusgang: Rang og nullitet

<u>Husk</u>: Lad V være et underrum af $\mathbb{R}^n$. En basis for V er en mængde af vektorer $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p\}$ fra V, der opfylder

(1) $\mathcal{B}$ er lineært uafhængig

(2) $Sp(\mathcal{B}) = V$

<u>Sætning</u>: Lad $V \neq \{\vec{0}\}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$. To vilkårlige baser $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ for V indeholder præcis samme antal vektorer.

(<u>Bevis</u>: Lad $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ og $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ være baser for V. Sæt $A = [\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \dots\ \vec{u}_k]$ og $B = [\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \dots\ \vec{v}_p]$.
Da $Sp(\mathcal{B}_1) = V$ findes $\vec{c}_i \in \mathbb{R}^k$ så $\vec{v}_i = A\vec{c}_i$ for $i = 1, 2, \dots, p$.
Lad C være $k \times p$-matricen $C = [\vec{c}_1\ \vec{c}_2\ \dots\ \vec{c}_p]$. Vi har

$$AC = [A\vec{c}_1\ A\vec{c}_2\ \dots\ A\vec{c}_p] = [\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \dots\ \vec{v}_p] = B.$$

Idet søjlerne i B er lineært uafhængige fås

$$C\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow AC\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow B\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

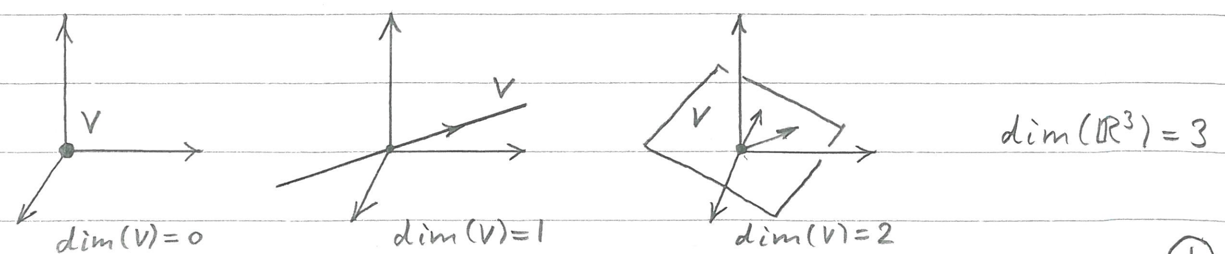
Dermed er søjlerne i C lineært uafhængige. Vi har altså p vektorer $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_p$ i $\mathbb{R}^k$, der er lineært uafhængige hvormed $p \leq k$. Tilsvarende fås $k \leq p$ så $k = p$.
q.e.d.)

<u>Def.</u> <u>Dimensionen</u> af et underrum $V \neq \{\vec{0}\}$ i $\mathbb{R}^n$ defineres som

$$\dim(V) = \text{antal vektorer i en basis for } V.$$

Dimensionen af $\{\vec{0}\}$ sættes til $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$.

<u>Eks.</u>



Eks: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ da der er n vektorer i standard basen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ for $\mathbb{R}^n$.

Sætning: Lad V være et k-dimensionelt (dvs. $\dim(V) = k$) underrum af $\mathbb{R}^n$. Enhver lineært uafhængig delmængde S af V indeholder højst k vektorer.

Bevis: OK for $V = \{\vec{0}\}$. Lad $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ være en lineært uafhængig delmængde af $V \neq \{\vec{0}\}$. Da kan vi udvide S til en basis $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_k\}$ for V, så $p \leq k$. q.e.d.

(*) Sætning: Lad $V \neq \{\vec{0}\}$ være et k-dimensionelt underrum af $\mathbb{R}^n$, og lad S være en delmængde af V som indeholder præcis k vektorer. Så er S en basis for V hvis

- S er lineært uafhængig

eller

- $Sp(S) = V$

Bevis: Antag S er lineært uafhængig. Udvid S til en basis $\mathcal{B}$ for V. Da både S og $\mathcal{B}$ indeholder netop k vektorer er $S = \mathcal{B}$. OK

Antag $Sp(S) = V$. Udtynd S til en basis $\mathcal{C}$ for V. Da både S og $\mathcal{C}$ indeholder netop k vektorer er $S = \mathcal{C}$. OK q.e.d.

Eks. Hvis vi har 3 lineært uafhængige vektorer i $\mathbb{R}^3$, vil disse udgøre en basis for $\mathbb{R}^3$.

Rang og nullitet

Notation: # betyder "antal".

Lad A være en $m \times n$-matrix.

Def. Rangen og nulliteten af A er defineret som

$$\text{rang}(A) = \dim(\text{Col}(A)) = \#\text{ pivot søjler i } A$$
$$\text{nullitet}(A) = \dim(\text{Nul}(A)) = \#\text{ ikke-pivot søjler i } A$$

Bemærk: $\quad \text{rang}(A) + \text{nullitet}(A) = \#$ søjler i A

Eks. (Verificering af basis for nulrum)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vis at $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ udgør en basis for $\text{Nul}(A)$.

- Ved indsættelse ses at $A\vec{v}_1 = \vec{0}$ og $A\vec{v}_2 = \vec{0}$, så $\vec{v}_1 \in \text{Nul}(A)$ og $\vec{v}_2 \in \text{Nul}(A)$.
- Da $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ ikke er proportionale, er $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ lineært uafhængig.
- Vi beregner $\dim(\text{Nul}(A))$:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 + r_3 \to r_3]{2r_1 + r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_3 \to r_3} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{på REF}}$$

$\dim(\text{Nul}(A)) = \text{nullitet}(A) = 2$

Ved sætning ⊛ fås at $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ er en basis for $\text{Nul}(A)$.

Lad A være en $m \times n$-matrix.

Husk: Rækkerummet $\text{Row}(A)$ er underrummet af $\mathbb{R}^n$ udspændt af A's rækkevektorer. Dvs. $\text{Row}(A) = \text{Col}(A^T)$.

Bemærk: Elementære rækkeoperationer bevarer rækkerummet (men ikke søjlerummet). Heraf følger

Sætning: Ikke-nul rækkevektorerne i A's RREF udgør en basis for $\text{Row}(A)$.

Bemærk: $\quad \dim(\text{Row}(A)) = \text{rang}(A) = \dim(\text{Col}(A))$

Sætning: $\quad \text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$

Bevis: $\quad \text{rang}(A^T) = \dim(\text{Col}(A^T)) = \dim(\text{Row}(A)) = \text{rang}(A)$. q.e.d.

__Eks:__ $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ovenfor}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{på RREF}}.$

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ udgør en basis for $Row(A)$.

__Sætning:__ Lad V og W være underrum af $\mathbb{R}^n$.

(1) Hvis $V \subseteq W$ så er $\dim(V) \leq \dim(W)$.

(2) Hvis $V \subseteq W$ og $\dim(V) = \dim(W)$ så er $V = W$.

(Bevis: OK for $V = \{\vec{0}\}$ så antag $V \neq \{\vec{0}\}$.

Lad $\mathcal{B}$ være en basis for V. Da vi kan udvide $\mathcal{B}$ til en basis for W er $\dim(V) \leq \dim(W)$ OK. Hvis $\dim(V) = \dim(W)$ tilføjes ingen nye vektorer, så $\mathcal{B}$ er også en basis for W og $W = Sp(\mathcal{B}) = V$. OK q.e.d.)