13. kursusgang: Repetition

Def. Et <u>underrum</u> W af $\mathbb{R}^n$ er en delmængde $W \subseteq \mathbb{R}^n$, der opfylder

(1) $\vec{0} \in W$

(2) $\vec{u} \in W, \vec{v} \in W \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in W$

(3) $\vec{u} \in W, c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\vec{u} \in W$

Sætning: Lad $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k \in \mathbb{R}^n$. Da er $W = \mathrm{Sp}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\}$ et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Underrum hørende til matricer

$A = [\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n]$ $m \times n$-matrix

$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Sp}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ <u>søjlerummet</u> for A

$\mathrm{Nul}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$ <u>nulrummet</u> for A

Bemærk: $\mathrm{Col}(A)$ er billedmængden og $\mathrm{Nul}(A)$ er kernen for afbildningen $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$.

<u>Rækkerummet</u> $\mathrm{Row}(A)$ er underrummet af $\mathbb{R}^n$ udspændt af A's rækkevektorer.

Baser for underrum

W underrum af $\mathbb{R}^n$.

Def. En <u>basis</u> for W er en mængde $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p\}$ af vektorer fra W, der opfylder

(1) $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p\}$ er lineært uafhængig

(2) $\mathrm{Sp}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p\} = W$

Sætning: Ethvert underrum $W \neq \{\vec{0}\}$ af $\mathbb{R}^n$ har en basis.

Sætning (Udtynding til basis)
Lad $S = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\} \neq \{\vec{0}\}$ være en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$ og lad $W = Sp\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\}$. Så kan S udtyndes til en basis for W ved at fjerne et antal (måske ingen) vektorer fra S.

Sætning (Udvidelse til basis)
Lad $S = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\}$ være en lineært uafhængig mængde af vektorer i et underrum W af $\mathbb{R}^n$. Da kan S udvides til en basis for W ved at tilføje et endeligt antal (måske ingen) vektorer fra W til S.

!Bemærk:

- Pivot søjlerne i A udgør en basis for Col(A)
- En basis for Nul(A) findes ved at løse ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$ via A's RREF og skrive løsningsmængden på parametriseret vektorform.

Opgaver:

Eks: Find en mængde af frembringere for underrummet
$$\left\{ \begin{bmatrix} 4t \\ s+t \\ -2s+t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 4t \\ s+t \\ -2s+t \end{bmatrix} \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\} = Sp\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Frembringere : $\underline{\underline{\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}$

Eks.: Er $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i Nul(A), hvor $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$?

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{så} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in Nul(A).$$