14. kursusgang: Repetition

V underrum af $\mathbb{R}^n$, $V \neq \{\vec{0}\}$

Def. $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p\} \subseteq V$ kaldes en basis for V såfremt

(1) $\mathcal{B}$ er lineart uafhængig

(2) $Sp(\mathcal{B}) = V$

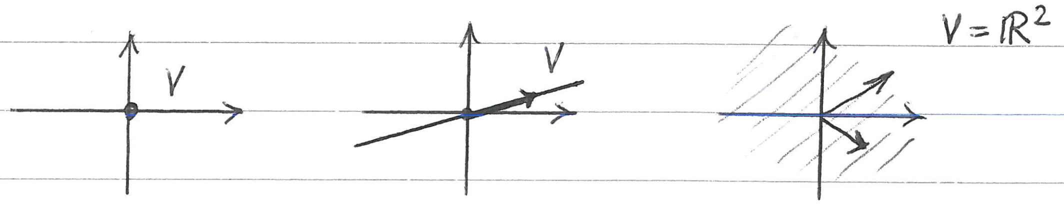
Sætning: To vilkårlige baser $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ for V indeholder præcis samme antal vektorer.

Def.* Dimensionen af V:

$$\dim(V) = \#\text{ vektorer i en basis for } V.$$

Vi sætter $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$.

Eks:



$\dim(V)=0$ $\dim(V)=1$ $\dim(V)=2$

Sætning: Lad $k = \dim(V)$ og antag at $S \subseteq V$ er en delmængde som indeholder præcis k vektorer. Så er S en basis for V hvis

- S er lineart uafhængig

eller

- $Sp(S) = V$

Rang og nullitet

A $m \times n$-matrix.

$$\text{rang}(A) = \dim(\text{Col}(A)) = \#\text{ pivot søjler i } A.$$

$$\text{nullitet}(A) = \dim(\text{Nul}(A)) = \#\text{ ikke-pivot søjler i } A.$$

---

* # betyder "antal"

$$\text{rang}(A) + \text{nullitet}(A) = \#\text{ søjler i } A$$

<u>Def.</u> Row(A) er spændet af A's rækkevektorer
dvs. $\text{Row}(A) = \text{Col}(A^T)$

<u>Sætning</u>: Ikke-nul rækkevektorerne i A's RREF udgør en basis for Row(A).

$$\dim(\text{Row}(A)) = \text{rang}(A)$$
$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T).$$

<u>Opgaver</u>

<u>Eks.</u>

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 \end{bmatrix}$$

(a) Find en basis for billedmængden $T(\mathbb{R}^4)$

(b) Find en basis for nulrummet $\text{Ker}(T)$ hvis $\text{Ker}(T) \neq \{\vec{0}\}$.

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbb{R}^4) = \text{Col}(A)$$
$$\text{Ker}(T) = \text{Nul}(A)$$

- Pivot søjlerne <u>i A</u> udgør en basis for Col(A)
- Løs ligningen $A\vec{x} = \vec{0}$ via A's RREF og skriv løsningsmængden på parametriseret vektorform. Vektorerne heri udgør en basis for Nul(A)