15. kursusgang: Mere om lineære transformationer og deres matrix repræsentation

Husk: En afbildning $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ siges at være lineær såfremt

$$(\mathrm{I}) \qquad T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

$$(\mathrm{II}) \qquad T(c\vec{u}) = cT(\vec{u})$$

for alle $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ og $c \in \mathbb{R}$.

Husk: Hvis $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er lineær, så findes der en entydig $m \times n$ - matrix A, kaldet standard matricen for T, så

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

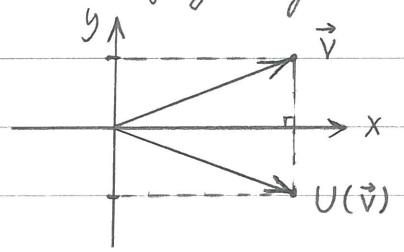
for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Denne matrix er givet ved

$$A = [T(\vec{e}_1)\ T(\vec{e}_2)\ \dots\ T(\vec{e}_n)].$$

Def. En <u>lineær operator</u> T på $\mathbb{R}^n$ er en lineær afbildning

$$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Eks: Spejling i x-aksen er en lineær operator på $\mathbb{R}^2$.

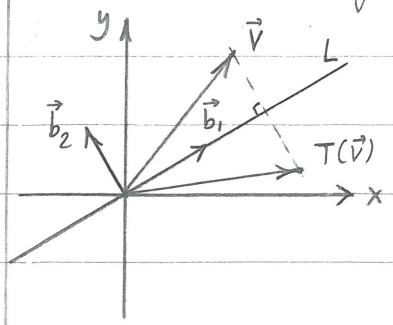


$U: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$;

$$U\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Standard matricen for U er $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Motivation: Hvordan kan vi finde forskriften for en spejling T i en vilkårlig linje L gennem $(0,0)$?



En geometrisk overvejelse viser at (I) og (II) holder, så T er lineær. Vælg en basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ så $\vec{b}_1 \parallel L$ og $\vec{b}_2 \perp L$.

Da har vi

$$T(\vec{b}_1) = \vec{b}_1 = 1\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2, \quad [T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{b}_2) = -\vec{b}_2 = 0\vec{b}_1 + (-1)\vec{b}_2, \quad [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Matricen $[[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} \quad [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ beskriver T i basen $\mathcal{B}$.

<u>Def.</u> Lad T være en lineær operator på $\mathbb{R}^n$ og lad $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ være en basis for $\mathbb{R}^n$. <u>Matrix repræsentationen</u> af T <u>relativt til</u> $\mathcal{B}$ er $n \times n$-matricen

$$[T]_{\mathcal{B}} = [[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} \quad [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} \quad \dots \quad [T(\vec{b}_n)]_{\mathcal{B}}].$$

<u>Sætning:</u> Lad T være en lineær operator på $\mathbb{R}^n$ med standard matrix A (dvs. $T(\vec{x}) = A\vec{x}$). Lad $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ være en basis for $\mathbb{R}^n$ og sæt $B = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_n]$. Da gælder

(1) $\quad [T]_{\mathcal{B}} = B^{-1}AB \quad$ og $\quad A = B[T]_{\mathcal{B}}B^{-1}$.

(2) $\quad [T(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$.

<u>Bevis:</u>

(1)
$$\begin{aligned}
[T]_{\mathcal{B}} &= [[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} \quad [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} \quad \dots \quad [T(\vec{b}_n)]_{\mathcal{B}}] \\
&= [[A\vec{b}_1]_{\mathcal{B}} \quad [A\vec{b}_2]_{\mathcal{B}} \quad \dots \quad [A\vec{b}_n]_{\mathcal{B}}] \\
&\overset{*}{=} [B^{-1}A\vec{b}_1 \quad B^{-1}A\vec{b}_2 \quad \dots \quad B^{-1}A\vec{b}_n] \\
&= B^{-1}A[\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_n] \\
&= B^{-1}AB. \qquad \text{OK}
\end{aligned}$$

$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1}AB \Rightarrow B[T]_{\mathcal{B}}B^{-1} = BB^{-1}ABB^{-1} = A$. OK

(2) $\quad [T(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = [A\vec{x}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}A\vec{x} = B^{-1}ABB^{-1}\vec{x} = [T]_{\mathcal{B}}[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$

q.e.d.

<u>Eks.</u> Lad $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være spejling i linjen $L: y = ax$. Vi vælger en passende basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ hvor $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$, $\vec{b}_2 = \widehat{\vec{b}_1} = \begin{bmatrix} -a \\ 1 \end{bmatrix}$.

Bemærk at $\vec{b}_1 \parallel L$ og $\vec{b}_2 \perp L$.

---

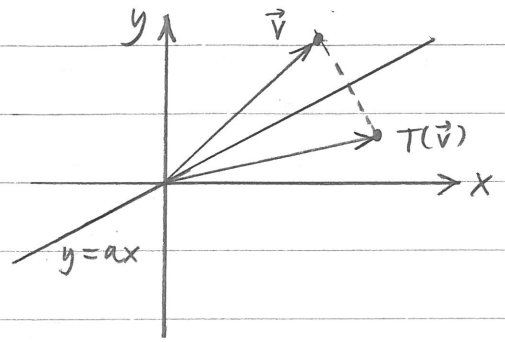
* Husk at $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\vec{v}$ for $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

$$B = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(B) = 1 + a^2$$

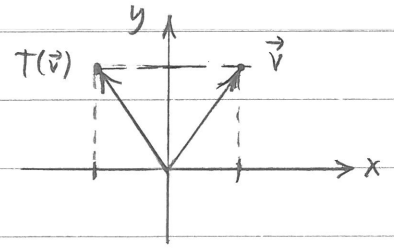
$$A = B\,[T]_{\mathcal{B}}\,B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & a^2-1 \end{bmatrix}$$

Dvs. spejling i linjen $y = ax$ er givet ved

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ ; \ T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & a^2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$



Spejling i linjen $x = 0$ er givet ved
$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ ; \ T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$



<u>Def.</u> Lad A og B være $n \times n$-matricer.
A siges at være <u>similar</u> med B såfremt der findes en inverterbar $n \times n$-matrix P så
$$B = P^{-1} A P.$$

(<u>Bemærk</u>:

(1) A er similar med A

(2) Hvis A er similar med B så er B similar med A.

(3) Hvis A er similar med B og B er similar med C så er A similar med C.

Bevis:

(1) $A = I_n^{-1} A I_n$

(2) $B = P^{-1} A P \Rightarrow A = P P^{-1} A P P^{-1} = P B P^{-1} = (P^{-1})^{-1} B P^{-1}$

(3) $B = P^{-1} A P$, $C = Q^{-1} B Q \Rightarrow C = Q^{-1} P^{-1} A P Q = (PQ)^{-1} A (PQ)$.

q.e.d.

Bemærk: På grund af (2) siger vi at A og B er similære såfremt A er similar med B.

Bemærk: Ved sætningen ovenfor, er standard matricen A for T similar med matricen $[T]_{\mathcal{B}}$