17. kursusgang: Egenværdier og egenvektorer.

Lad A være en $n \times n$-matrix.

Def. Hvis der findes en skalar λ og en vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ så

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v},$$

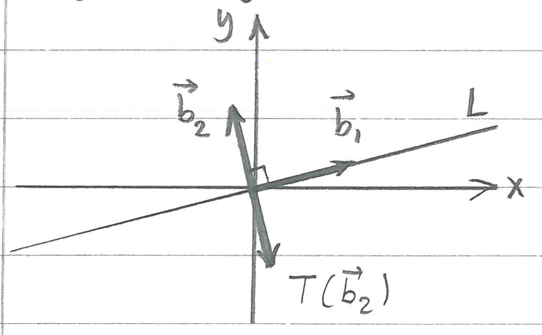
så kaldes λ en egenværdi for A og $\vec{v}$ kaldes en egenvektor hørende til λ.

For en lineær operator T på $\mathbb{R}^n$ har vi analogt

Def. En skalar λ kaldes en egenværdi for T med tilhørende egenvektor $\vec{v}$ såfremt

$$T(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \quad \text{og} \quad \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Eks. Lad T være operatoren på $\mathbb{R}^2$ givet ved spejling i linjen L gennem $(0,0)$. Vælg en basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ for $\mathbb{R}^2$



så $\vec{b}_1 \parallel L$ og $\vec{b}_2 \perp L$. Da er

$T(\vec{b}_1) = 1 \cdot \vec{b}_1$,

$T(\vec{b}_2) = (-1)\,\vec{b}_2$.

Dvs. 1 er en egenværdi for T med egenvektor $\vec{b}_1$ og -1 er en egenværdi med egenvektor $\vec{b}_2$.

Eks. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vis at $\vec{v}$ er en egenvektor for A og find egenværdien.

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4\vec{v} \quad \text{og} \quad \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Dvs. $\vec{v}$ er en egenvektor for A hørende til egenværdien 4.

Bemærk: Antag λ er en egenværdi for A. Hvis $\vec{v}$ er en egenvektor hørende til λ, så er $c\vec{v}$ for $c \neq 0$ det også, idet

$$A(c\vec{v}) = c(A\vec{v}) = c(\lambda\vec{v}) = \lambda(c\vec{v}) \quad \text{og} \quad c\vec{v} \neq \vec{0}.$$

! <u>Bemærk</u>:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \iff A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0} \iff (A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}$$
$$\iff \vec{v} \in Nul(A - \lambda I_n).$$

<u>Def.</u> Antag λ er en egenværdi for A. <u>Egenrummet</u> hørende til λ er underrummet

$$Nul(A - \lambda I_n).$$

<u>Egenrummet består af samtlige egenvektorer hørende til λ samt af $\vec{0}$.</u>

<u>Eks</u> $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Vi ser at 3 er en egenværdi idet $A\vec{e}_1 = 3\vec{e}_1$. Vi finder en basis for det tilhørende egenrum:

$$A - 3I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 \text{ fri} \\ x_2 = x_3 \\ x_3 \text{ fri} \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \; ; \; x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

<u>Dvs egenrummet hørende til egenværdien 3 har basis</u> $\underline{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$

<u>Hvordan finder man egenværdierne for en matrix?</u>

! <u>Sætning</u>: Egenværdierne for en $n \times n$-matrix A er løsningerne til den <u>karakteristiske ligning</u>

$$\det(A - tI_n) = 0.$$

<u>Bevis</u>:

λ er en egenværdi for A $\iff$

$Nul(A - \lambda I_n) \neq \{\vec{0}\} \iff nullitet(A - \lambda I_n) \neq 0 \iff$

$rang(A - \lambda I_n) < n \iff A - \lambda I_n$ er ikke inverterbar $\iff$

$\det(A - \lambda I_n) = 0.$

q.e.d.

Bemærk: Af definitionen på determinant følger, at $\det(A - tI_n)$ er et polynomium i t af grad n. Dette polynomium kaldes det karakteristiske polynomium for A. Egenværdierne for A er rødderne i det karakteristiske polynomium for A.

Eks. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (1) Find egenværdierne for A
(2) Find baser for de tilhørende egenrum.

(1)
$$\det(A - tI_3) = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 2 \\ 0 & 2 & 1-t \end{vmatrix} = (3-t)((1-t)^2-4)$$
$$= -(t-3)(t^2-2t-3).$$
$$t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow t = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2} \Leftrightarrow t=-1 \vee t=3$$
Dvs. $\det(A-tI_3) = -(t-3)(t-(-1))(t-3) = -(t-(-1))(t-3)^2$

Egenværdierne er $\underline{-1}$ og $\underline{3}$.

(2)
$$A-(-1)I_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 \text{ fri} \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egenrummet hørende til -1 har basis $\underline{\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$

Ved eksemplet ovenfor har egenrummet hørende til 3 basen $\underline{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$.

Bemærk: Egenværdierne for en øvre (eller nedre) $n \times n$-trekantsmatrix $U = [u_{ij}]$ er diagonalelementerne $u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn}$.

Bevis:
$$\det(U - tI_n) = \begin{vmatrix} u_{11}-t & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22}-t & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & u_{nn}-t \end{vmatrix} = (u_{11}-t)(u_{22}-t)\cdots(u_{nn}-t).$$
q.e.d.

Def. Multipliciteten (eller den algebraiske multiplicitet) m_λ

af en egenværdi λ er multiplicitetens af λ som rod i det karakteristiske polynomium.

Eks: $\det(A - tI_3) = -(t-(-1))(t-3)^2$
Egenværdien -1 har multiplicitet $m_{-1} = 1$
Egenværdien 3 har multiplicitet $m_3 = 2$

Eks. Hvis $\det(A - tI_6) = (t-1)^2(t-5)^3(t-7)$ så er $m_1 = 2$, $m_5 = 3$, $m_7 = 1$.

Sætning: Hvis λ er en egenværdi for $n \times n$-matricen A, så er

$$1 \leq \dim(\mathrm{Nul}(A - \lambda I_n)) \leq m_\lambda .$$

Bevis: udeladt.
(Def. Den geometriske multiplicitet af en egenværdi λ er dimensionen af det tilhørende egenrum.
Bemærk: geometrisk multiplicitet $\leq$ algebraisk multiplicitet.)

Sætning: Similære matricer har samme karakteristiske polynomium.
Bevis:
Antag at A og B er similære dvs. $B = P^{-1}AP$. Da er

$$\begin{aligned}
\det(B - tI_n) &= \det(P^{-1}AP - tP^{-1}P) \\
&= \det((P^{-1}A - tP^{-1})P) \\
&= \det(P^{-1}(A - tI_n)P) \\
&= \det(P^{-1})\det(A - tI_n)\det(P) \\
&= \det(A - tI_n)\det(P^{-1})\det(P) \\
&= \det(A - tI_n)\det(P^{-1}P) \\
&= \det(A - tI_n)\det(I_n) \quad = \det(A - tI_n) \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$