17. kursusgang: Repetition

Lad T være en lineær operator på $\mathbb{R}^n$ dvs. en lineær afbildning $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ en basis for $\mathbb{R}^n$.

<u>Def.</u> Matrix repræsentationen af T relativt til $\mathcal{B}$ er $n \times n$-matricen

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} \; [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} \dots [T(\vec{b}_n)]_{\mathcal{B}} \right].$$

<u>Sætning</u>: Lad A være standard matricen for T (dvs. $T(\vec{x}) = A\vec{x}$) og sæt $B = [\vec{b}_1 \; \vec{b}_2 \dots \vec{b}_n]$. Da gælder

(1) $[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1}AB$ hvormed $A = B[T]_{\mathcal{B}}B^{-1}$.

(2) $[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$.

<u>Tilføjelse</u>: $[T]_{\mathcal{B}}$ er den eneste matrix der har egenskaben (2).

(<u>Bevis</u>: Hvis $n \times n$-matricen $C = [\vec{c}_1 \; \vec{c}_2 \dots \vec{c}_n]$ opfylder at $[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = C[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, så er $[T(\vec{b}_i)]_{\mathcal{B}} = C[\vec{b}_i]_{\mathcal{B}} = C\vec{e}_i = \vec{c}_i$ for $i = 1, 2, \dots, n$. Altså er $[T]_{\mathcal{B}} = C$. q.e.d.)

<u>Eks.</u> Lad $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ være en basis for $\mathbb{R}^2$, og lad T være en lineær operator på $\mathbb{R}^2$ således at

$T(\vec{b}_1) = 2\vec{b}_1 - 7\vec{b}_2$ og $T(\vec{b}_2) = 3\vec{b}_1 + 8\vec{b}_2$.

Da er $[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$ og $[T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$ hvormed $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$.

Bemærk: Husk at for $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ er $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ den entydige løsning til ligningssystemet $[\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \dots\ \vec{b}_n \mid \vec{v}]$. Dermed kan vi beregne $[T]_{\mathcal{B}}$ ved rækkereduktion som følger:

$$[\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \dots\ \vec{b}_n \mid T(\vec{b}_1)\ T(\vec{b}_2) \dots T(\vec{b}_n)] \to \dots \to [I_n \mid [T]_{\mathcal{B}}].$$

Eks. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ basis for $\mathbb{R}^2$,

$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$ lineær operator på $\mathbb{R}^2$.

Beregn $[T]_{\mathcal{B}}$.

$$[\vec{b}_1\ \vec{b}_2 \mid T(\vec{b}_1)\ T(\vec{b}_2)] = \left[\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{matrix} \,\middle|\, T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\ T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right] =$$

$$\left[\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{matrix}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{matrix}\right] \xrightarrow{-2r_1 + r_2 \to r_2} \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 2 & 0 \\ -3 & 3 \end{matrix}\right] \to \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right]$$

Dvs. $[T]_{\mathcal{B}} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}}$.

<u>Opgaverne</u>: Det er OK at bruge MATLAB i opgave 7 og opgave 15.