18. kursusgang: Diagonalisering

Def. En *diagonalmatrix* er en $n \times n$-matrix $D = [d_{ij}]$, hvor $d_{ij} = 0$ for $i \neq j$.

Eks.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Notation:

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Def. En $n \times n$-matrix A siges at være *diagonaliserbar* såfremt A er similær med en diagonalmatrix. Dvs.

$$A = PDP^{-1},$$

hvor D er en $n \times n$-diagonalmatrix og P er en inverterbar $n \times n$-matrix.

Bemærk: Hvis A er diagonaliserbar

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

så er $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ egenværdierne for A, da similære matricer har de samme egenværdier.

Ikke alle matricer er diagonaliserbare:

Eks: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Antag at $A = PDP^{-1}$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Da A er en øvre trekantsmatrix, ser vi at 0 er eneste egenværdi. Så $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, hvormed $D = 0$ og $A = P0P^{-1} = 0$, hvilket er en modstrid.

Sætning: Lad A være en $n\times n$-matrix. A er diagonaliserbar hvis og kun hvis A har n lineært uafhængige egenvektorer. I fald A har n lineært uafhængige egenvektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ med tilhørende egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, kan vi skrive

$$A = PDP^{-1},$$

hvor $P = [\vec{v}_1\ \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n]$ og $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Bevis: Lad P være en generel $n\times n$-matrix og D en $n\times n$-diagonalmatrix som følger

(*) $\quad P = [\vec{v}_1\ \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n]$, $D = [\lambda_1\vec{e}_1\ \ \lambda_2\vec{e}_2 \ldots \lambda_n\vec{e}_n]$.

OBS: $\quad AP = PD \iff A\vec{v}_j = \lambda_j\vec{v}_j \quad ; \ j = 1, 2, \ldots, n.$

Begrundelse: j'te søjle i AP er $A\vec{v}_j$ og j'te søjle i PD er $P\lambda_j\vec{e}_j = \lambda_j P\vec{e}_j = \lambda_j\vec{v}_j$. OK

Antag A er diagonaliserbar, $A = PDP^{-1}$, og skriv P og D som i (*). Da P er inverterbar er $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ lineært uafhængige. Da $AP = PDP^{-1}P = PD$ giver OBS at de er egenvektorer OK.

Antag omvendt at $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ er lineært uafhængige egenvektorer med $A\vec{v}_j = \lambda_j\vec{v}_j$. Definer P og D som i (*). Da er P inverterbar og ved OBS fås $AP = PD$ hvormed $A = APP^{-1} = PDP^{-1}$ OK

q.e.d.

Eks. $\quad A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 12 & 11 \end{bmatrix}$

$$\det(A - tI_2) = \begin{vmatrix} -3-t & -4 \\ 12 & 11-t \end{vmatrix} = (-3-t)(11-t) + 48$$

$$= t^2 - 8t + 15 = (t-3)(t-5)$$

Egenværdierne er 3 og 5.

$\lambda = 3$: $A - 3I_2 = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 12 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Egenvektor $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\lambda = 5$: $A - 5I_2 = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Egenvektor $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

De to egenvektorer $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ er ikke proportionale, så de er lineært uafhængige. Diagonalisering af A:

$$\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 12 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Bemærk: Hvis $A = PDP^{-1}$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ så er

$$A^k = PD^kP^{-1} = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)\,P^{-1}.$$

Bevis:

$A^k = (PDP^{-1})^k = PDP^{-1}\,PDP^{-1}\,PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = PD^kP^{-1}$ og

$D^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)$. q.e.d.

Eks. $\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 12 & 11 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Sætning: Hvis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ er egenvektorer hørende til forskellige egenværdier for en matrix A, så er $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ lineært uafhængige.

Bevis: udeladt.

Vi har dermed følgende resultat:

Sætning: En $n \times n$-matrix med n forskellige egenværdier er diagonaliserbar.

Eks. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ er diagonaliserbar.

! **Sætning:** Lad A være en $n \times n$-matrix med de forskellige egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ ($r < n$ er tilladt).

- Matricen A er diagonaliserbar hvis og kun hvis summen af dimensionerne af egenrummene hørende til $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ er præcis n.
- Hvis A er diagonaliserbar, og $\mathcal{B}_k$ er en basis for egenrummet hørende til λ_k, da udgør

$$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$$

en basis for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorer for A.

Bevis: udeladt

Eks. Antag at A er en 3×3-matrix med karakteristisk polynomium $-(t-2)(t^2+4)$.
Eneste egenværdi er $\lambda = 2$ med multiplicitet $m_\lambda = 1$.
Da $\dim(\mathrm{Nul}((A-\lambda I)) \leq m_\lambda = 1 < 3$, er A ikke diagonaliserbar.

Fortolkning af diagonalisering

Betragt en diagonaliserbar $n\times n$-matrix

$$A = PDP^{-1},$$

hvor $P = [\vec{v}_1\ \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n]$ og $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
Da P er invertibar, er $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ en basis for $\mathbb{R}^n$.
Se nu på den lineære operator med standard matrix A:

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \,;\ T(\vec{x}) = A\vec{x}.$$

Matrix repræsentationen for T relativt til basen $\mathcal{B}$ er

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = P^{-1}PDP^{-1}P = D.$$