18. kursusgang : Repetition

A $n \times n$ - matrix

Def. Hvis der findes en skalar λ og en vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ så

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v},$$

så kaldes λ en egenværdi for A og $\vec{v}$ en egenvektor hørende til λ.

Sætning : Egenværdierne for A er løsningerne til den karakteristiske ligning :

$$\det(A - tI_n) = 0.$$

Venstresiden er et polynomium i t af grad n kaldet det karakteristiske polynomium.

Hvis λ er en egenværdi for A, så findes de tilhørende egenvektorer ved at løse ligningen

$$(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}.$$

Def. Lad λ være en egenværdi for A. Underrummet

$$\mathrm{Nul}(A - \lambda I_n)$$

af $\mathbb{R}^n$ kaldes egenrummet hørende til λ. Det består af samtlige egenvektorer hørende til λ og $\vec{0}$.

Sætning : Hvis λ er en egenværdi for A så gælder

$$1 \leq \dim(\mathrm{Nul}(A - \lambda I_n)) \leq m_\lambda,$$

hvor m_λ er multipliciteten af λ som rod i det karakteristiske polynomium (dvs. $(t-\lambda)^{m_\lambda}$ indgår som "optimal" faktor).

Sætning : Similære*) matricer har samme karakteristiske polynomium.

---

*) A og B er similære hvis $B = P^{-1}AP$ for en invertibel matrix P.

Sætning: Egenværdierne for en øvre (eller nedre) triangulær matrix $U = [u_{ij}]$ er diagonalindgangene $u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn}$.

Eks: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

(1) Find egenværdierne for A.

(2) Find baser for de tilhørende egenrum.

(1) $\det(A - tI_2) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & -2-t \end{vmatrix} = (1-t)(-2-t) - 4$

$= t^2 + t - 6.$

$t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow t = -3 \vee t = 2.$

Egenværdierne er $\underline{\underline{-3}}$ og $\underline{\underline{2}}$

(2)

$\lambda = -3$: $A - (-3)I_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \left[\begin{matrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{matrix}\right] \end{array}$, $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \text{ fri} \end{cases}$

Basis for egenrummet for $\lambda = -3$: $\underline{\underline{\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}}}$

$\lambda = 2$: $A - 2I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_2 \text{ fri} \end{cases}$

Basis for egenrummet for $\lambda = 2$: $\underline{\underline{\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}$

Lad T være en lineær operator på $\mathbb{R}^n$.

Def. Hvis der findes en skalar λ og en vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ så

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v},$$

så kaldes λ en egenværdi for T og $\vec{v}$ en egenvektor hørende til λ.

Bemærk: Lad A være standard matricen for T (dvs. $T(\vec{x}) = A\vec{x}$). Da er egenværdierne og egenvektorerne for T og A de samme (idet $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow A\vec{v} = \lambda\vec{v}$).