19. kursusgang: Ortogonalitet

Lad $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Def. Normen (eller længden) af $\vec{u}$ defineres som

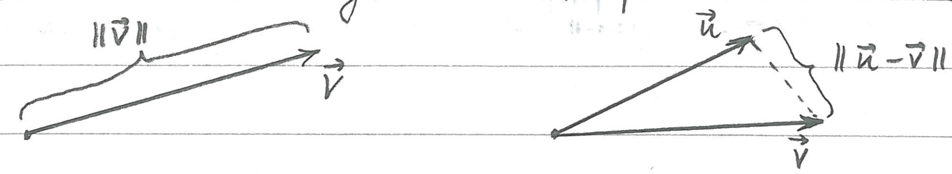
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}.$$

Afstanden mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$ defineres som $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

Prikproduktet af $\vec{u}$ og $\vec{v}$ defineres ved

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

Bemærk: For $n=2$ og $n=3$ er definitionen velkendt.



Bemærk:

(1) $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v}$

(2) $\quad (A\vec{p}) \cdot \vec{q} = \vec{p} \cdot (A^T \vec{q})$, A $m\times n$-matrix, $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{q} \in \mathbb{R}^m$.

Bevis:

(1) $\quad \vec{u}^T \vec{v} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \vec{u} \cdot \vec{v}$.

(2) $\quad (A\vec{p}) \cdot \vec{q} = (A\vec{p})^T \vec{q} = \vec{p}^T A^T \vec{q} = \vec{p} \cdot (A^T \vec{q})$ $\quad$ q.e.d.

Sætning: For alle vektorer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ og skalarer c gælder

(1) $\quad \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

(2) $\quad \|c\vec{u}\| = |c| \, \|\vec{u}\|$

(3) $\quad \|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$

(4) $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

(5) $\quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

(6) $\quad (c\vec{u}) \cdot \vec{v} = c(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (c\vec{v})$

Bevis:

(1), (3), (4), (6) er oplagte.

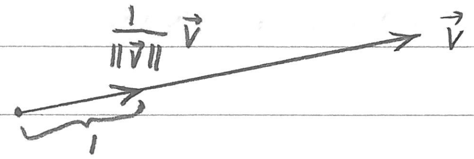
(2) $\|c\vec{u}\|^2 = (c\vec{u})\cdot(c\vec{u}) = c^2(\vec{u}\cdot\vec{u}) = c^2\|\vec{u}\|^2$,

hvormed $\|c\vec{u}\| = |c|\,\|\vec{u}\|$.

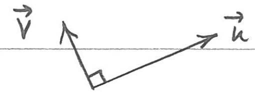
(5) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}^T(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}^T\vec{v} + \vec{u}^T\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$. q.e.d.

__Def.__ Hvis $\|\vec{u}\| = 1$ siges $\vec{u}$ at være en __enhedsvektor__.

__Bemærk:__ (normalisering) Hvis $\vec{v} \neq \vec{0}$ så er $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ en enhedsvektor. Dette følger af (2).



__Def.__ $\vec{u}$ og $\vec{v}$ siges at være __ortogonale__ (stå vinkelret på hinanden) såfremt $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.



__Sætning__ (Pythagoras i $\mathbb{R}^n$)

$\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ortogonale hvis og kun hvis

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$

__Bevis:__

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{u} + (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v}$$
$$= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

Dvs. $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow 2\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ q.e.d.

__Sætning:__ For alle vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^n$ gælder

$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ (Cauchy-Schwarz's ulighed),

$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (Trekantsuligheden)

__Bevis:__

Cauchy-Schwarz: OK for $\vec{u} = \vec{0}$ eller $\vec{v} = \vec{0}$ så antag $\vec{u} \neq \vec{0}$ og $\vec{v} \neq \vec{0}$. Sæt $\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ og $\vec{z} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$. Da er $\vec{w}\cdot\vec{w} = 1$ og $\vec{z}\cdot\vec{z} = 1$. Vi har

$$0 \leq \|\vec{w} \pm \vec{z}\|^2 = (\vec{w} \pm \vec{z})\cdot(\vec{w} \pm \vec{z}) = \vec{w}\cdot\vec{w} \pm 2\vec{w}\cdot\vec{z} + \vec{z}\cdot\vec{z} = 2 \pm 2\vec{w}\cdot\vec{z}$$

$\Rightarrow \pm 2\vec{w}\cdot\vec{z} \leq 2 \Rightarrow \pm\vec{w}\cdot\vec{z} \leq 1 \Rightarrow |\vec{w}\cdot\vec{z}| \leq 1.$

Heraf fås

$|\vec{u}\cdot\vec{v}| = |(\|\vec{u}\|\vec{w})\cdot(\|\vec{v}\|\vec{z})| = |\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\vec{w}\cdot\vec{z}| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\vec{w}\cdot\vec{z}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ OK

Trekantsuligheden følger af Cauchy-Schwarz:

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$

$= (\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|)^2$, hvoraf resultatet.

q.e.d.

Eks. $|u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3| \leq \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\,\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$.

Ortogonale vektorer

Def. Lad $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ være en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$.

- S siges at være ortogonal såfremt $\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j = 0$ for $i \neq j$.
- S siges at være ortonormal såfremt S er ortogonal og $\|\vec{v}_i\| = 1$ for $i = 1, 2, \ldots, k$.

⊛ Bemærk: Hvis S er ortogonal, så er

$$(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_k\vec{v}_k)\cdot\vec{v}_i = c_i\|\vec{v}_i\|^2.$$

Sætning: Lad $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ være en ortogonal mængde af ikke-nul vektorer. Da er S lineært uafhængig.

Bevis: Antag at $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$. Ved ⊛ fås så at $c_i\|\vec{v}_i\|^2 = \vec{0}\cdot\vec{v}_i = 0$. Da $\|\vec{v}_i\|^2 \neq 0$, følger det at $c_i = 0$ for $i = 1, 2, \ldots, k$.

q.e.d.

Sætning: Lad $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ være en basis for et underrum V af $\mathbb{R}^n$, og lad $\vec{u} \in V$. Da gælder

- Hvis S er ortogonal, så er

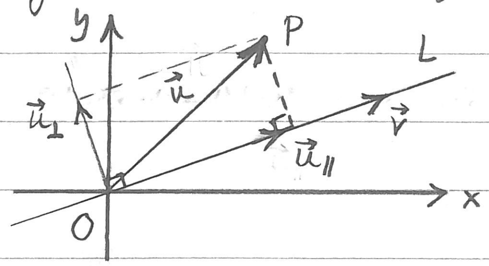
$$\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2 + \ldots + \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|^2}\vec{v}_k.$$

- Hvis S er ortonormal, så er

$$\vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{u}\cdot\vec{v}_2)\vec{v}_2 + \ldots + (\vec{u}\cdot\vec{v}_k)\vec{v}_k.$$

<u>Bevis</u>: Da S er en basis for V findes entydige vægte så $\vec{u} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k$. Desuden er $\vec{v}_i \neq \vec{0}$ så $\|\vec{v}_i\| \neq 0$ for alle i. Ved ⊛ fås $\vec{u}\cdot\vec{v}_i = c_i\|\vec{v}_i\|^2 \Rightarrow c_i = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}_i}{\|\vec{v}_i\|^2}$. q.e.d.

<u>Bemærk</u>: Lad L være en linje i planen gennem $(0,0)$, og lad P være et punkt. Betragt $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$.



Vælg $\vec{v} \neq \vec{0}$ så $\vec{v} \parallel L$. Da er ortogonalprojektionen af $\vec{u}$ på L givet ved
$$\vec{u}_\parallel = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}.$$

Dette ses ved at vælge $\vec{w} \neq \vec{0}$ så $\vec{w} \perp L$ (f. eks. $\vec{w} = \hat{\vec{v}}$) og bruge sætningen ovenfor på den ortogonale basis $\{\vec{v}, \vec{w}\}$.
Bemærk at $\vec{u}_\perp = \vec{u} - \vec{u}_\parallel$ er vinkelret på L og at afstanden fra P til L er
$$\|\vec{u}_\perp\| = \left\| \vec{u} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} \right\|.$$

! <u>Sætning</u> (Gram - Schmidt)
Lad $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ være en basis for et underrum V af $\mathbb{R}^n$.
Definer
$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1,$$
$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\vec{u}_2\cdot\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1,$$
$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \frac{\vec{u}_3\cdot\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 - \frac{\vec{u}_3\cdot\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2,$$
$$\vdots$$
$$\vec{v}_k = \vec{u}_k - \frac{\vec{u}_k\cdot\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 - \frac{\vec{u}_k\cdot\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2 - \dots - \frac{\vec{u}_k\cdot\vec{v}_{k-1}}{\|\vec{v}_{k-1}\|^2}\vec{v}_{k-1}.$$
Da udgør $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ en ortogonal basis for V. En tilhørende ortonormal basis er givet ved $\left\{\dfrac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}, \dfrac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}, \dots, \dfrac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}\right\}$.
(<u>Bevis</u>: udeladt)

<u>Bemærk</u>: Ethvert underrum af $\mathbb{R}^n$ har en ortogonal basis.