19. kursusgang: Repetition

Def. Diagonalmatrix:

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Lad A være en $n \times n$-matrix.

Def. A siges at være diagonaliserbar såfremt A er similær med en diagonalmatrix. Dvs.

$$A = PDP^{-1},$$

hvor D er en $n \times n$-diagonalmatrix og P er en inverterbar $n \times n$-matrix.

Sætning 1: A er diagonaliserbar hvis og kun hvis A har n lineært uafhængige egenvektorer.

I fald A har n lineært uafhængige egenvektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ med tilhørende egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, så er

$$A = PDP^{-1},$$

hvor $P = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n]$ og $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Sætning 2: Egenvektorer hørende til forskellige egenværdier for A er lineært uafhængige.

Eks. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$\det(A - tI_2) = \begin{vmatrix} 2-t & 3 \\ 3 & 2-t \end{vmatrix} = t^2 - 4t - 5 = (t+1)(t-5).$

Egenværdierne er -1 og 5.

$\lambda = -1$: $A - (-1)I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, egenvektor $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda = 5$: $A - 5I_2 = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, egenvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ved sætning 1 og sætning 2 fås

$A = PDP^{-1}$, hvor $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Sætning: Lad A være en $n \times n$-matrix med de forskellige egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ ($r < n$ er tilladt).

- A er diagonaliserbar hvis og kun hvis summen af dimensionerne af egenrummende hørende til $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ er præcis n.
- Hvis A er diagonaliserbar, og $\mathcal{B}_k$ er en basis for egenrummet hørende til λ_k, da udgør
$$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_r$$
en basis for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorer for A.

Eks. En 3×3-matrix A med karakteristisk polynomium $-(t-3)(t^2+9)$ er ikke diagonaliserbar. For eneste egenværdi $\lambda = 3$ har multiplicitet $m_\lambda = 1$ så
$$1 \le \dim(\mathrm{Nul}(A - \lambda I_3)) \le m_\lambda = 1 < 3.$$

Fortolkning af diagonalisering:

A $n\times n$-matrix

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $T(\vec{x}) = A\vec{x}$.

Sætning: A er diagonaliserbar hvis og kun hvis der findes en basis $\mathcal{B}$ for $\mathbb{R}^n$ så $[T]_\mathcal{B}$ er en diagonalmatrix. (En sådan basis består nødvendigvis af egenvektorer for A).

En anvendelse af diagonalisering

Hvis $A = PDP^{-1}$, hvor $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, så er
$$A^k = P \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k) \cdot P^{-1}$$
for $k = 1, 2, 3, \ldots$

Eks. (fortsat)
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -(-1)^k & 5^k \\ (-1)^k & 5^k \end{bmatrix} \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (-1)^k + 5^k & -(-1)^k + 5^k \\ -(-1)^k + 5^k & (-1)^k + 5^k \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$