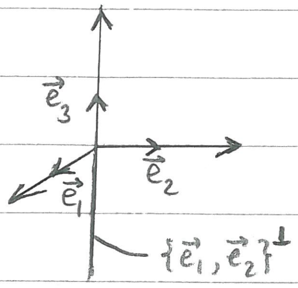
21. kursusgang: Ortogonale projektioner

Lad S være en ikke-tom delmængde af $\mathbb{R}^n$.

__Def.__ Det <u>ortogonale komplement</u> $S^\perp$ til S defineres som

$$S^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \text{ for alle } \vec{u} \in S\}.$$

__Eks.__



$$S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

$$S^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{v} \cdot \vec{e}_1 = 0, \vec{v} \cdot \vec{e}_2 = 0\}$$

$$= \{c\vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3 \mid c \in \mathbb{R}\} = Sp\{\vec{e}_3\}$$

__Sætning:__ $S^\perp$ er et underrum af $\mathbb{R}^n$.

__Bevis:__ Antag at $\vec{v}, \vec{w} \in S^\perp$ og $c \in \mathbb{R}$. For alle $\vec{u} \in S$ har vi:

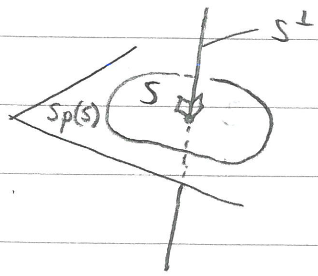
$\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$ så $\vec{0} \in S^\perp$,

$(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 + 0 = 0$ så $\vec{v} + \vec{w} \in S^\perp$,

$(c\vec{v}) \cdot \vec{u} = c(\vec{v} \cdot \vec{u}) = c \cdot 0 = 0$ så $c\vec{v} \in S^\perp$.

q.e.d.

__Sætning:__ $S^\perp = (Sp(S))^\perp$



__Bevis:__ opgave.

__Hint:__ $\vec{v} \cdot (c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k) =$

$$c_1 \vec{v} \cdot \vec{u}_1 + c_2 \vec{v} \cdot \vec{u}_2 + \dots + c_k \vec{v} \cdot \vec{u}_k .$$

__Sætning:__ Lad A være en $m \times n$-matrix. Da gælder

$(Row(A))^\perp = Nul(A)$.

__Bevis:__ opgave.

__Hint:__

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \text{---} \; \vec{r}_1 \; \text{---} \\ \text{---} \; \vec{r}_2 \; \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \; \vec{r}_m \; \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \cdot \vec{x} \\ \vec{r}_2 \cdot \vec{x} \\ \vdots \\ \vec{r}_m \cdot \vec{x} \end{bmatrix}.$$

__Bemærk:__ $(Col(A))^\perp = (Row(A^T))^\perp = Nul(A^T)$.

__Anvendelse:__ $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ givet. Find en basis for $S^\perp$.

1. Dan matricen A med rækkevektorerne $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$.

$S^\perp = (Sp(S))^\perp = (Row(A))^\perp = Nul(A)$.

2. Find basis for $Nul(A)$.

<u>Bemærk</u>: Hvis W er et underrum af $\mathbb{R}^n$, så er $W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$.

<u>Bevis</u>: $\vec{0} \in W \cap W^\perp$ og $\vec{w} \in W \cap W^\perp \Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow \|\vec{w}\|^2 = 0 \Rightarrow \vec{w} = \vec{0}$. q.e.d.

<u>Sætning</u> (Ortogonal dekomposition)

Lad W være et underrum af $\mathbb{R}^n$. For ethvert $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ findes <u>entydige</u> vektorer $\vec{w} \in W$ og $\vec{z} \in W^\perp$ så

$$\vec{x} = \vec{w} + \vec{z}.$$

Hvis $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ er en ortonormal basis for W, så er

$$\vec{w} = (\vec{x} \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{x} \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 + \dots + (\vec{x} \cdot \vec{v}_k)\vec{v}_k. \quad \circledast$$

<u>Bevis</u>:

Vælg en ortonormal basis $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ for W.

Definer $\vec{w}$ ved $\circledast$ og bemærk at $\vec{w} \in W$. OK. Sæt $\vec{z} = \vec{x} - \vec{w}$.

Da er $\vec{x} = \vec{w} + \vec{z}$ OK. Vi har

$$\vec{z} \cdot \vec{v}_i = (\vec{x} - \vec{w}) \cdot \vec{v}_i = \vec{x} \cdot \vec{v}_i - \vec{w} \cdot \vec{v}_i = \vec{x} \cdot \vec{v}_i - (\vec{x} \cdot \vec{v}_i)\overbrace{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}^{1} = 0,$$

for $i = 1, 2, \dots, k$, så $\vec{z} \in \mathcal{B}^\perp = (Sp(\mathcal{B}))^\perp = W^\perp$ OK.

Entydighed: Antag at $\vec{x} = \vec{w} + \vec{z}$ og $\vec{x} = \vec{w}' + \vec{z}'$, hvor $\vec{w}, \vec{w}' \in W$ og $\vec{z}, \vec{z}' \in W^\perp$. Da $\vec{w} + \vec{z} = \vec{w}' + \vec{z}'$ er

$$\vec{w} - \vec{w}' = \vec{z}' - \vec{z} \in W \cap W^\perp = \{\vec{0}\},$$

hvoraf $\vec{w} = \vec{w}'$ og $\vec{z} = \vec{z}'$. q.e.d.

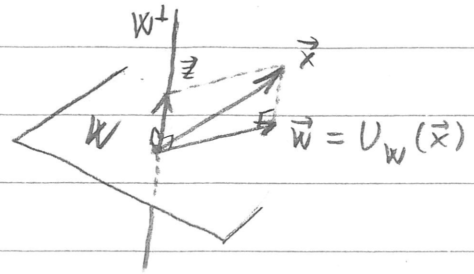
(<u>Bemærk</u>: Af sætningen følger: $\dim(W) + \dim(W^\perp) = n$.)

<u>Ortogonalprojektion på underrum.</u>

Lad W være et underrum af $\mathbb{R}^n$.

<u>Def.</u> Den ortogonale projektion på W er afbildningen $U_W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ defineret ved

$$U_W(\vec{x}) = \vec{w} \text{ , hvor } \vec{x} = \vec{w} + \vec{z} \text{ , } \vec{w} \in W \text{, } \vec{z} \in W^{\perp}.$$



!! **Bemærk**: Ved ⊛ har vi forskriften

$$U_W(\vec{x}) = (\vec{x} \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{x} \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 + \dots + (\vec{x} \cdot \vec{v}_k)\vec{v}_k \text{ .}$$

Heraf ses at $U_W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er en lineær afbildning. Lad P_W være standard matricen for U_W, dvs. $U_W(\vec{x}) = P_W \vec{x}$. Vi vil finde en formel for P_W, der ikke kræver at man har fundet en ortonormal basis for W.

Lemma: Hvis $n \times k$-matricen C har lineært uafhængige søjler, så er $k \times k$-matricen $C^T C$ invertebar.

(**Bevis**: $C^T C \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow$

$$\|C\vec{x}\|^2 = (C\vec{x}) \cdot (C\vec{x}) = (C\vec{x})^T C\vec{x} = \vec{x}^T \underbrace{C^T C \vec{x}}_{} = 0 \Rightarrow$$

$C\vec{x} = \vec{0} \xRightarrow{\text{lin. uafh.}} \vec{x} = \vec{0}$. Dermed er $C^T C$ invertebar. q.e.d.)

!! **Sætning**: Hvis søjlerne i $n \times k$-matricen C udgør en basis for underrummet W af $\mathbb{R}^n$, så er standard matricen for ortogonalprojektionen på W følgende $n \times n$-matrix:

$$P_W = C(C^T C)^{-1} C^T .$$

Bevis:

Sæt $\vec{w} = U_W(\vec{x})$. Da $W = Col(C)$ er $\vec{w} = C\vec{v}$ for et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, og

$$W^{\perp} = (Col(C))^{\perp} = Nul(C^T) .$$

Idet $\vec{x} - \vec{w} \in W^{\perp}$, har vi

$$\vec{0} = C^T(\vec{x} - \vec{w}) = C^T\vec{x} - C^T\vec{w} = C^T\vec{x} - C^T C\vec{v} \Rightarrow$$

$$C^T C \vec{v} = C^T \vec{x} \xRightarrow{\text{Lemma}} \vec{v} = (C^T C)^{-1} C^T \vec{x} \Rightarrow$$

$$\vec{w} = C\vec{v} = \underbrace{C(C^T C)^{-1} C^T}_{} \vec{x} \text{ .}$$

q.e.d

Sætning: Lad W være et underrum af $\mathbb{R}^n$, og lad $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$.
Da er $P_W \vec{u}$ den vektor i W der ligger tættest på $\vec{u}$.

Bevis:

Sæt $\vec{w} = P_W \vec{u}$ og lad $\vec{w}'$ være en vilkårlig vektor i W.
Da $\vec{u} - \vec{w} \in W^\perp$ og $\vec{w} - \vec{w}' \in W$, giver Pythagoras for $\mathbb{R}^n$ at

$$\|\vec{u} - \vec{w}'\|^2 = \|(\vec{u} - \vec{w}) + (\vec{w} - \vec{w}')\|^2 = \|\vec{u} - \vec{w}\|^2 + \|\vec{w} - \vec{w}'\|^2$$

$$> \|\vec{u} - \vec{w}\|^2 \quad \text{for } \vec{w}' \neq \vec{w}. \qquad \text{q.e.d.}$$

Def. Afstanden fra en vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ til et underrum W af $\mathbb{R}^n$ defineres som

$$\|\vec{u} - P_W \vec{u}\|.$$

Eks. $W = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ underrum af $\mathbb{R}^3$.

Bemærk at de to frembringere ikke er proportionale, så de udgør en basis for W.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^T C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (C^T C)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ortogonalprojektionen på W har standard matricen

$$P_W = C(C^T C)^{-1} C^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$