21. kursusgang: Repetition

$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$ vektorer i $\mathbb{R}^n$, c skalar

$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$ <u>norm</u>

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$ <u>prikprodukt</u>

Afstanden mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

Prikprodukt og matrixmultiplikation:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v}$

$(A\vec{p}) \cdot \vec{q} = \vec{p} \cdot (A^T \vec{q})$, A $m \times n$-matrix, $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{q} \in \mathbb{R}^m$.

Regneregler:

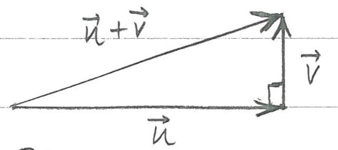
$\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
$\|c\vec{u}\| = \lvert c \rvert \, \|\vec{u}\|$	$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$	$(c\vec{u}) \cdot \vec{v} = c(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (c\vec{v})$

Cauchy-Schwarz's ulighed: $\lvert \vec{u} \cdot \vec{v} \rvert \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$.

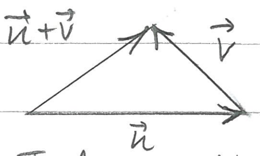
Trekantsuligheden: $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

$\vec{u}$ og $\vec{v}$ siges at være <u>ortogonale</u> såfremt $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Pythagoras for $\mathbb{R}^n$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.



Phytagoras



Trekantsuligheden

<u>Ortogonale vektorer</u>

Lad $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

S kaldes <u>ortogonal</u> såfremt $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$ for $i \neq j$.

S kaldes <u>ortonormal</u> såfremt $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$.

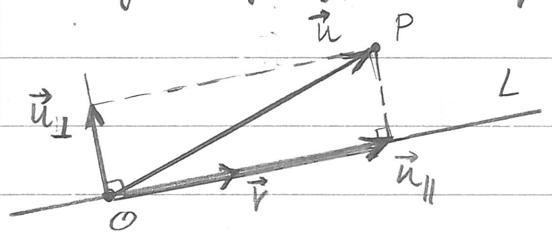
Sætning: Hvis S er ortogonal og $\vec{v}_i \neq \vec{0}$ for $i = 1, 2, \ldots, k$, så er S lineært uafhængig.

Sætning: Lad $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ være en basis for et underrum V af $\mathbb{R}^n$, og lad $\vec{u} \in V$. Da gælder

- Hvis S er ortogonal, så er
$$\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 + \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2 + \ldots + \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|^2}\vec{v}_k.$$

- Hvis S er ortonormal, så er
$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{u} \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 + \ldots + (\vec{u} \cdot \vec{v}_k)\vec{v}_k.$$

Ortogonalprojektion på en linje L i planen gennem (0,0):



Vælg $\vec{v} \neq \vec{0}$ så $\vec{v} \parallel L$.
Ortogonalprojektionen af $\vec{u}$ på L er
$$\vec{u}_{\|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}.$$

Sæt $\vec{u}_\perp = \vec{u} - \vec{u}_{\|}$. Denne er vinkelret på L, og afstanden fra P til L er $\|\vec{u}_\perp\|$.

Sætning (Gram – Schmidt)

Lad $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ være en basis for et underrum V af $\mathbb{R}^n$.

Definer
$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1,$$
$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1,$$
$$\vdots$$
$$\vec{v}_k = \vec{u}_k - \frac{\vec{u}_k \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 - \frac{\vec{u}_k \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2 - \ldots - \frac{\vec{u}_k \cdot \vec{v}_{k-1}}{\|\vec{v}_{k-1}\|}\vec{v}_{k-1}.$$

Da udgør $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ en ortogonal basis for V. En tilhørende ortonormal basis er givet ved
$$\left\{\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}, \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}, \ldots, \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}\right\}.$$

OBS: For $\vec{v} \neq \vec{0}$ er $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ en enhedsvektor.