22. kursusgang: Ortogonale matricer

<u>Def.:</u> En $n \times n$-matrix Q siges at være en <u>ortogonal matrix</u> såfremt søjlerne i Q udgør en <u>ortonormal</u> basis for $\mathbb{R}^n$.

<u>Bemærk:</u> "ortonormal matrix" ville være en mere logisk betegnelse.

<u>Eks.</u> $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ortogonal , $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ortogonal

<u>Sætning:</u> Lad Q være en $n \times n$-matrix. Følgende er ækvivalente:

(1) Q er ortogonal

(2) $Q^T Q = I_n$

(3) Q er inverterbar og $Q^T = Q^{-1}$

(4) $(Q\vec{u}) \cdot (Q\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$ for alle $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

(5) $\|Q\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$ for alle $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$.

<u>Bevis:</u>

$Q = [\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \cdots\ \vec{q}_n]$.

(1)⇒(2): $Q^T Q = \begin{bmatrix} — \vec{q}_1 — \\ — \vec{q}_2 — \\ \vdots \\ — \vec{q}_n — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{q}_1 & \vec{q}_2 & \cdots & \vec{q}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$, hvormed

$[Q^T Q]_{ij} = \vec{q}_i \cdot \vec{q}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ dvs. $Q^T Q = I_n$.

(2)⇒(3): Da $Q^T Q = I_n$ er Q inverterbar med $Q^{-1} = Q^T$.

(3)⇒(4): $(Q\vec{u}) \cdot (Q\vec{v}) = \vec{u} \cdot (Q^T Q \vec{v}) = \vec{u} \cdot (I_n \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$

(4)⇒(5): $\|Q\vec{u}\|^2 = (Q\vec{u}) \cdot (Q\vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

(5)⇒(1): Vi har $\vec{q}_j = Q\vec{e}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$.

$\|\vec{q}_j\| = \|Q\vec{e}_j\| = \|\vec{e}_j\| = 1$ OK

$i \neq j$: $\|\vec{q}_i + \vec{q}_j\|^2 = \|Q\vec{e}_i + Q\vec{e}_j\|^2 = \|Q(\vec{e}_i + \vec{e}_j)\|^2 = \|\vec{e}_i + \vec{e}_j\|^2$

$= 2 = \|\vec{q}_i\|^2 + \|\vec{q}_j\|^2$

Ved Pythagoras følger at $\vec{q}_i \cdot \vec{q}_j = 0$ OK

q.e.d.

Eks. Rotationsmatricen $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ er ortogonal:

$$A_\theta^T A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 .$$

⊛ Sætning: Lad P og Q være ortogonale matricer. Da gælder

(1) $\det(Q) = \pm 1$

(2) PQ, Q^{-1} og Q^T er ortogonale matricer.

Bevis:

(1) $1 = \det(I_n) = \det(Q^T Q) = \det(Q^T)\det(Q) = \det(Q)\det(Q)$
$= (\det(Q))^2 \Rightarrow \det(Q) = \pm 1.$

(2) Følger af sætningen ovenfor. q.e.d.

Def. En lineær operator T på $\mathbb{R}^n$ siges at være ortogonal såfremt dens standard matrix er en ortogonal matrix.

Sætning: Lad T være en ortogonal lineær operator på $\mathbb{R}^2$ med standard matrix Q.

- Hvis $\det(Q) = 1$, så er T en rotation
- Hvis $\det(Q) = -1$, så er T en spejling

Bevis:

$Q = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ortogonal

$\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \|^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$ så $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$ for et $\theta \in \mathbb{R}$.

$\| \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \|^2 = 1 \Leftrightarrow c^2 + d^2 = 1$ så $c = \cos\mu$, $d = \sin\mu$ for et $\mu \in \mathbb{R}$.

Da $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ er ortogonale, har vi at $\mu = \theta \pm 90°$.

$\mu = \theta + 90°$: $\cos(\theta + 90°) = -\sin\theta$, $\sin(\theta + 90°) = \cos\theta$.

$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = A_\theta$ og $\det(Q) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. OK

$\mu = \theta - 90°$: $\cos(\theta - 90°) = \sin\theta$, $\sin(\theta - 90°) = -\cos\theta$.

$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ og $\det(Q) = -\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1$

Vi finder egenværdier og egenvektorer for Q:

$$\det(Q - tI_2) = \begin{vmatrix} \cos\theta - t & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - t \end{vmatrix} = (\cos\theta - t)(-\cos\theta - t) - \sin^2\theta$$

$$= t^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$$

Egenværdier: $1, -1$.

Lad $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ være tilhørende egenvektorer dvs.

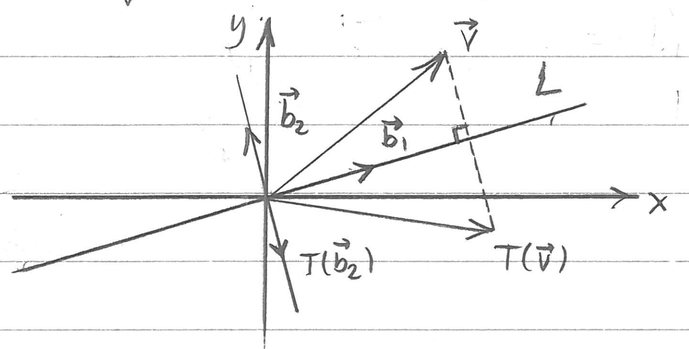
$$\vec{b}_1 \neq \vec{0}, \; Q\vec{b}_1 = 1 \cdot \vec{b}_1 \quad \text{og} \quad \vec{b}_2 \neq \vec{0}, \; Q\vec{b}_2 = (-1)\vec{b}_2.$$

Vi har

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = (Q\vec{b}_1) \cdot (Q\vec{b}_2) = \vec{b}_1 \cdot (-\vec{b}_2) = -\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2$$

$$\Rightarrow 2\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0 \Rightarrow \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0$$

Dvs. $\vec{b}_1$ og $\vec{b}_2$ er ortogonale. Lad L være linjen gennem $(0,0)$ parallel med $\vec{b}_1$.



$\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ er en ortogonal basis for $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{v} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2,$$

$$T(\vec{v}) = c_1 T(\vec{b}_1) + c_2 T(\vec{b}_2)$$

$$= c_1\vec{b}_1 - c_2\vec{b}_2$$

Vi ser at T er spejling i linjen L. q.e.d.

<u>Eks:</u> $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ortogonal OK

$$\det(Q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

Dvs. Q er en rotationsmatrix.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Af $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ og $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ fås rotationsvinklen $\theta = 45°$.

<u>Sætning</u>: Lad T og U være ortogonale lineære operatorer på $\mathbb{R}^2$. Da gælder

(1) Hvis T og U er spejlinger, så er $T \circ U$ en rotation

(2) Hvis den ene af T og U er en spejling, og den anden er en rotation, så er $T \circ U$ en spejling.

Bevis: Lad P og Q være standard matricerne for henholdsvis T og U. Ved sætning ⊛ er PQ ortogonal, så $T \circ U$ er en ortogonal lineær operator med standard matrix PQ. Idet

$$\det(PQ) = \det(P)\det(Q),$$

følger resultatet ved ovenstående sætning. q.e.d.