22. kursusgang: Repetition

$S \subseteq \mathbb{R}^n$, S ikke-tom.

Det ortogonale komplement til S:

$$S^\perp = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \text{ for alle } \vec{u} \in S \}.$$

<u>Sætning:</u>
- $S^\perp$ er et underrum af $\mathbb{R}^n$
- $S^\perp = (Sp(S))^\perp$

<u>Sætning:</u> $(Row(A))^\perp = Nul(A)$, A $m \times n$-matrix.

<u>Eks.</u> $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. Find en basis for $S^\perp$.

Sæt $A = [1 \;\; 0 \;\; 2]$. Så er $S^\perp = (Sp(S))^\perp = (Row(A))^\perp = Nul(A)$.

$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \end{array}$
$[\,1 \;\; 0 \;\; 2\,]$, $\begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 \text{ fri} \\ x_3 \text{ fri} \end{cases}$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}$

<u>Ortogonalprojektion på et underrum</u>

W underrum af $\mathbb{R}^n$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ en <u>ortonormal</u> basis for W.

Den ortogonale projektion på W er den lineære afbildning

$U_W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $U_W(\vec{x}) = (\vec{x} \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{x} \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 + \dots + (\vec{x} \cdot \vec{v}_k)\vec{v}_k$.

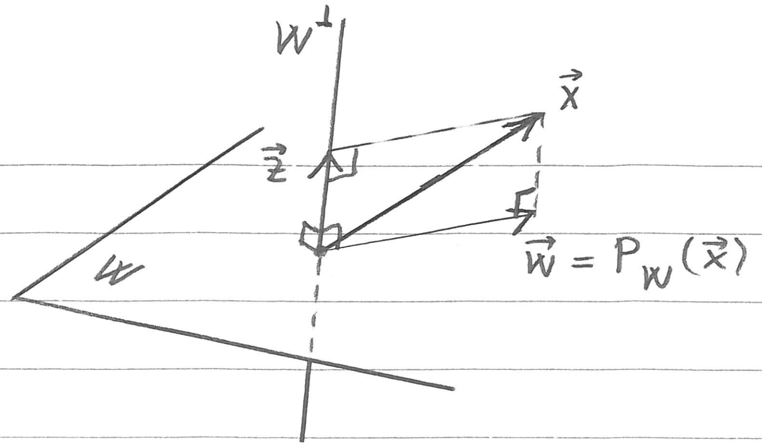
<u>Sætning</u> (Ortogonal dekomposition)

For ethvert $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ findes <u>entydige</u> $\vec{w} \in W$ og $\vec{z} \in W^\perp$ så

$$\vec{x} = \vec{w} + \vec{z}.$$

Vektorerne $\vec{w}$ og $\vec{z}$ er givet ved

$$\vec{w} = U_W(\vec{x}), \quad \vec{z} = \vec{x} - U_W(\vec{x}).$$



Eks. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ortonormal basis for W.

$$U_W\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \frac{1}{\sqrt{2}}}_{\frac{5}{2} = \frac{15}{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \frac{1}{\sqrt{3}}}_{-\frac{2}{3} = -\frac{4}{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 11 \\ 19 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - U_W\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 11 \\ 19 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ortogonal dekomposition : $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 11 \\ 19 \\ -4 \end{bmatrix}}_{\in W} + \underbrace{\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{\in W^\perp}$

Sætning : Antag at søjlerne i $n \times k$-matricen C udgør en basis for underrummet W af $\mathbb{R}^n$. Da er $C^T C$ inverterbar, og standard matricen for ortogonal-projektionen $U_W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ på W er $n \times n$-matricen

$$P_W = C(C^T C)^{-1} C^T.$$

Sætning : $U_W(\vec{x})$ er den vektor i W, der ligger tættest på $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Afstanden fra $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ til underrummet W er

$$\| \vec{x} - U_W(\vec{x}) \|.$$