23. kursusgang: Symmetriske matricer

Def. En matrix A siges at være symmetrisk såfremt

$$A^T = A.$$

Eks. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 7 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix}$.

Sætning: Lad A være en symmetrisk matrix. Hvis $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er egenvektorer for A hørende til forskellige egenværdier λ og μ, så er $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ortogonale.

Bevis:

$$(A\vec{u})\cdot\vec{v} = (\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$$
$$= \vec{u}\cdot(A^T\vec{v}) = \vec{u}\cdot(A\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\mu\vec{v}) = \mu(\vec{u}\cdot\vec{v})$$
$$\Rightarrow (\lambda-\mu)(\vec{u}\cdot\vec{v}) = 0$$

Da $\lambda \neq \mu$ følger det at $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. q.e.d.

Vi undersøger symmetriske 2×2-matricer nærmere:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$.

$$\det(A - tI_2) = \begin{vmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{vmatrix} = (a-t)(c-t) - b^2$$
$$= t^2 - (a+c)t + ac - b^2.$$

Diskriminanten er

$$D = (a+c)^2 - 4(ac-b^2) = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac + 4b^2$$
$$= a^2 + c^2 - 2ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$$

$D > 0$: Så har A to forskellige egenværdier, og to tilhørende egenvektorer vil være ortogonale ifølge sætningen ovenfor. Dermed har $\mathbb{R}^2$ en ortonormal basis af egenvektorer for A.

$D = 0$: Så er $a = c$ og $b = 0$, hvormed $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, så $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$ bestående af egenvektorer for A.

Konklusion: A kan diagonaliseres ved en ortogonal matrix!

Bemærk: Lad A være en $n \times n$-matrix. Antag at A kan diagonaliseres ved en ortogonal matrix:

$$A = PDP^{-1}, \quad P \text{ ortogonal}, \quad D \text{ diagonal}.$$

Idet $P^{-1} = P^T$ har vi:

$$A^T = (PDP^{-1})^T = (PDP^T)^T \overset{*)}{=} (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = PDP^{-1} = A,$$

dvs. A er symmetrisk.

! Sætning (Spektralsætningen): Lad A være en $n \times n$-matrix. Følgende er ækvivalente:

(1) A er symmetrisk.

(2) A kan diagonaliseres ved en ortogonal matrix:
$A = PDP^T$, P ortogonal, D diagonal. **)

(3) $\mathbb{R}^n$ har en ortonormal basis bestående af egenvektorer for A.

Bevis: udeladt

Eks. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ symmetrisk

$$\begin{vmatrix} 2-t & -2 \\ -2 & 5-t \end{vmatrix} = (2-t)(5-t) - 4 = t^2 - 7t + 6 = 0.$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25,$$

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow t = 1 \vee t = 6$$

Egenværdierne er 1 og 6.

$\lambda = 1$: $A - 1I_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ egenvektor

$\lambda = 6$: $A - 6I_2 = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ egenvektor

$\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ortonormale OK

Ortogonal diagonalisering af A:

$$A = PDP^T, \quad P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

---

*) Husk $(BC)^T = C^T B^T$.

**) Bemærk: $A = PDP^T \Leftrightarrow P^T A P = D$ for D ortogonal

Sætning (Spektral dekomposition):

Lad A være en symmetrisk $n\times n$-matrix, og lad $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ være en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorer for A med tilhørende egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Da er

$$A = \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \lambda_2 \vec{u}_2 \vec{u}_2^T + \dots + \lambda_n \vec{u}_n \vec{u}_n^T .$$

Her repræsenterer $P_i = \vec{u}_i \vec{u}_i^T$ den ortogonale projektion på $Sp\{\vec{u}_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Der gælder at

$$\operatorname{rang}(P_i) = 1 \quad \text{og} \quad P_i P_j = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \\ P_i & ; i = j \end{cases}.$$

(Bevis:

Vi har $A = PDP^T$, hvor

$$P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \dots \ \vec{u}_n] , \quad D = [\lambda_1 \vec{e}_1 \ \lambda_2 \vec{e}_2 \ \dots \ \lambda_n \vec{e}_n].$$

Matricen PD kan skrives som følger:

$$\begin{aligned} PD &= [P(\lambda_1 \vec{e}_1) \ P(\lambda_2 \vec{e}_2) \ \dots \ P(\lambda_n \vec{e}_n)] \\ &= [\lambda_1 P\vec{e}_1 \quad \lambda_2 P\vec{e}_2 \quad \dots \quad \lambda_n P\vec{e}_n] \\ &= [\lambda_1 \vec{u}_1 \quad \lambda_2 \vec{u}_2 \quad \dots \quad \lambda_n \vec{u}_n]. \end{aligned}$$

Heraf fås

$$\begin{aligned} A = PDP^T &= [\lambda_1 \vec{u}_1 \ \lambda_2 \vec{u}_2 \ \dots \ \lambda_n \vec{u}_n] \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \lambda_2 \vec{u}_2 \vec{u}_2^T + \dots + \lambda_n \vec{u}_n \vec{u}_n^T \qquad \text{OK} \end{aligned}$$

Matricen for ortogonalprojektionen på $Sp\{\vec{u}_i\}$ er

$$P_i = \vec{u}_i (\vec{u}_i^T \vec{u}_i)^{-1} \vec{u}_i^T = \vec{u}_i \, 1^{-1} \vec{u}_i^T = \vec{u}_i \vec{u}_i^T \qquad \text{OK}$$

Da $Col(P_i) = Sp\{\vec{u}_i\}$ er $\operatorname{rang}(P_i) = 1$ OK

$$P_i P_j = (\vec{u}_i u_i^T)(\vec{u}_j \vec{u}_j^T) = \vec{u}_i (\vec{u}_i^T \vec{u}_j) \vec{u}_j^T = \vec{u}_i (\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j) \vec{u}_j^T = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ P_i & , i = j \end{cases}$$

q.e.d.)

Eks. fortsat

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{u}_1 \vec{u}_1^T = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} [2 \ 1] = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{u}_2 \vec{u}_2^T = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} [-1 \ 2] = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Spektral dekomposition af A:

$$A = 1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} + 6 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Lidt om kvadratiske former

Def. Lad $a, b, c \in \mathbb{R}$. Da kaldes

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

en kvadratisk form i x og y.

Sæt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Vi har

$$\begin{aligned} \vec{v}^T A \vec{v} &= [x \ y] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \ y] \begin{bmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{bmatrix} \\ &= x(ax+by) + y(bx+cy) \\ &= ax^2 + 2bxy + cy^2. \end{aligned}$$

Bemærk at A er symmetrisk, så den kan diagonaliseres ved en ortogonal matrix:

$$A = PDP^T, \quad P \text{ ortogonal}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Lad $\mathcal{B}$ være ortonormal basen givet ved P's søjler, og lad (x', y') betegne koordinater relativt til $\mathcal{B}$. Vi har

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\vec{v} = P^T \vec{v},$$

hvormed

$$\begin{aligned} \vec{v}^T A \vec{v} &= \vec{v}^T P D P^T \vec{v} = (P^T \vec{v})^T D (P^T \vec{v}) \\ &= [x' \ y'] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [x' \ y'] \begin{bmatrix} \lambda_1 x' \\ \lambda_2 y' \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2. \end{aligned}$$

Dvs.

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2$$

Bemærk at vi har en simplere beskrivelse i (x', y')-koordinatsystemet når $b \neq 0$.

Eks: fortsat: $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 1 \cdot (x')^2 + 6 \cdot (y')^2$,
hvor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$.

Betragt ligningen $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 36$.

Den tilhørende relation mellem x' og y' er

$$(x')^2 + 6(y')^2 = 36 \Leftrightarrow \left(\frac{x'}{6}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1,$$

hvilket er ligningen for en ellipse i (x',y')-koordinat-systemet.

Idet $\det\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 1$, fremkommer (x,y)-koordinatsystemet ved rotation af (x',y')-systemet.

Rotationsvinklen θ er bestemt ved

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

hvoraf $\theta \approx 63{,}4°$