23. kursusgang: Repetition

Def. En $n \times n$-matrix Q siges at være ortogonal såfremt søjlerne i Q udgør en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$.

Sætning: Lad Q være en $n \times n$-matrix. Følgende er ækvivalente

(1) Q er ortogonal

(2) $Q^T Q = I_n$

(3) Q er inverterbar og $Q^{-1} = Q^T$

(4) $(Q\vec{u}) \cdot (Q\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$ for alle $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

(5) $\|Q\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$ for alle $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$.

Sætning: Lad P og Q være ortogonale $n \times n$-matricer. Da gælder

(1) $\det(Q) = \pm 1$

(2) PQ, Q^{-1} og Q^T er ortogonale

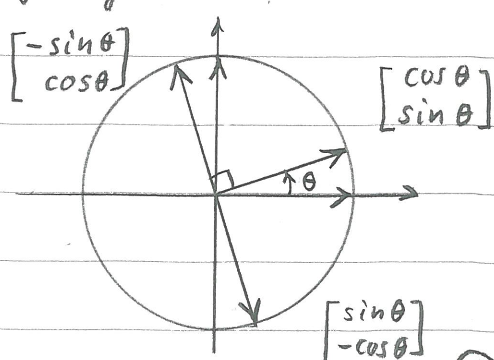
Def. En lineær operator $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ siges at være ortogonal såfremt standard matricen for T er ortogonal.

Sætning: Lad $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være en ortogonal lineær operator med standard matrix Q.

- Hvis $\det(Q) = 1$, så er T en rotation
- Hvis $\det(Q) = -1$, så er T en spejling

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

rotation $\qquad$ spejling



Eks. $Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ ortogonal OK

$\det(Q) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -1$

Dvs. Q er matricen for en spejling.

Vi bestemmer spejlingsaksen L. Den går gennem (0,0), og én egenvektor hørende til egenværdien 1 er parallel med L.

$$Q - 1\cdot I_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}-1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Egenvektor : $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

Spejlingsaksen har ligningen $y = \sqrt{3}\,x$.

Bemærk: Idet $\det(PQ) = \det(P)\det(Q)$ fås :

T	U	$T \circ U$
spejling	spejling	rotation
spejling	rotation	spejling
rotation	spejling	spejling
rotation	rotation	rotation

Lidt nyt

Def. En afbildning $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kaldes en flytning såfremt

$$\| F(\vec{u}) - F(\vec{v}) \| = \| \vec{u} - \vec{v} \| \text{ for alle } \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Man kan vise, at enhver flytning $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kan skrives på formen

$$F(\vec{x}) = Q\,\vec{x} + \vec{c},$$

hvor Q er en ortogonal $n \times n$-matrix, og $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ er en konstant vektor.