24. kursusgang: Repetition

Def. En $n \times n$-matrix A siges at være symmetrisk såfremt $A^T = A$.

Sætning (Spektralsætningen)
Lad A være en $n \times n$-matrix. Følgende er ækvivalente:
(1) A er symmetrisk
(2) Der findes en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorer for A.
(3) A kan diagonaliseres ved en ortogonal matrix:
$A = PDP^T$, P ortogonal, D diagonal.

Lad A være en symmetrisk $n \times n$-matrix, og lad $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ være en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorer for A med tilhørende egenværdier $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Da har vi:

- $A = PDP^T$, hvor $P = [\vec{u}_1\ \vec{u}_2 \dots \vec{u}_n]$ og $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, er en diagonalisering af A ved en ortogonal matrix.
- A har en spektral dekomposition som følger
$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_n P_n$,
hvor $P_i = \vec{u}_i \vec{u}_i^T$ er matricen for den ortogonale projektion på $\mathrm{Sp}\{\vec{u}_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Eks. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ symmetrisk OK.

$\det(A - tI_2) = \begin{vmatrix} 2-t & -1 \\ -1 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)^2 - 1 = t^2 - 4t + 3 = 0$

Diskriminanten er $(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$.

$t = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$

Dvs. egenværdierne er $\underline{\underline{1}}$ og $\underline{\underline{3}}$

$\lambda = 1$: $A - 1I_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, egenvektor $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,
normaliseret egenvektor $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda = 3$: $A - 3I_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, egenvektor $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

normaliseret egenvektor $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\vec{u}_1 \vec{u}_1^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\vec{u}_2 \vec{u}_2^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Spektral dekomposition af A :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ortogonal diagonalisering af A :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$$

<u>Bemærkning til opgaverne</u>

T/F : 21–40 : Læs først delafsnittet om kvadratiske former (side 427).