

Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
& Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Tirsdag den 4. januar, 2011. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 8 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side af besvarelsen.** God arbejdslyst!

NAVN: _____

STUDIENUMMMER: _____

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (6%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Find A^{-1} .

Opgave 2 (10%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Bring A på trappeform (række-echelonform).
2. Bestem determinanten af A .
3. Bestem determinanten af $(A^3)^T$.

Opgave 3 (10%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Find en basis for søjlerummet hørende til A .
2. Find en basis for nulrummet hørende til A .
3. Bestem $\text{rank } A$ og $\text{nullity } A$.

Opgave 4 (10%).

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

er en basis for underrummet $W \subseteq \mathbb{R}^4$.

1. Find ved hjælp af Gram-Schmidt processen en ortogonal basis for W .
2. Bestem herefter en ortonormal basis for W .

Opgave 5 (8%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Find egenverdierne for A .
2. Find en basis for hvert af de tilhørende egenrum.
3. Afgør om A er diagonaliserbar (husk at argumentere for dit svar).

Opgave 6 (8%).

Lad

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

1. Vis, at $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for W .
2. Argumenter for, at $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ ligger i W .
3. Lad $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Bestem $\mathbf{u}$.

Opgave 7 (8%).

Det oplyses, at

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

kan skrives $A = PDP^{-1}$, hvor

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Find den partikulære løsning til differentialligningssystemet

$$y_1' = 6y_1 + 6y_2$$

$$y_2' = -2y_1 - y_2$$

som opfylder bibetingelsen

$$\begin{cases} y_1(0) &= -7 \\ y_2(0) &= 4. \end{cases}$$

Opgave 8 (10%).

En lineær transformation $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er givet ved

$$T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$T \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

1. Bestem standardmatricen hørende til T .

2. Find $T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$.

3. Er T surjektiv? (Alternativt dansk udtryk er "på". Engelske udtryk er "surjective" eller "onto").

4. Er T injektiv? (Alternativt dansk udtryk er "en-til-en". Engelske udtryk er "injective" eller "one-to-one").

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (4%).

Der er givet tre vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^7$, som er lineært *uafhængige*. Sæt

$$H = \text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}\}.$$

Afkryds det sande udsagn nedenfor.

- ☐ Dimensionen af H er 7.
- ☐ Dimensionen af H er 3.
- ☐ H kan beskrives som en linie i $\mathbf{R}^7$.

Opgave 10 (10%).

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -15 & 7 & -20 & -5 \\ 0 & 0 & -34 & 50 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & -60 & -140 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 910 \end{bmatrix}.$$

Afkryds *samtlig*e sande udsagn nedenfor (bemærk: hver forkert afkrydsning *ophæver* én rigtig afkrydsning).

- | | |
|---|---|
| ☐ A er inverterbar (regulær). | ☐ Tallet -15 er egen værdi for A . |
| ☐ Den lineære transformation induceret af A er injektiv (engelsk: one-to-one). | ☐ A er på reduceret række-echelonform (reduceret trappeform). |
| ☐ A er på række-echelonform (trappeform). | ☐ Der findes et $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^5$, således at ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke er konsistent. |
| ☐ $\text{nullity } A = 1$. | ☐ A er en 4×4 -matrix. |
| ☐ $\text{rank } A = 5$. | ☐ A er diagonaliserbar. |
| ☐ $\text{nullity } A + \text{rank } A = 6$. | |

Opgave 11 (6%).

Der er givet en lineær afbildning $S: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^3$. Besvar følgende to spørgsmål.

Bestem den største værdi af n , for hvilken der med sikkerhed gælder, at S *ikke* er surjektiv (engelsk: onto):

- | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| ☐ 0 | ☐ 2 | ☐ 4 | ☐ 6 | ☐ 8 | ☐ 10 |
| ☐ 1 | ☐ 3 | ☐ 5 | ☐ 7 | ☐ 9 | ☐ 11 |

Bestem den største værdi af n , for hvilken der gælder, at S *kan* være være injektiv (engelsk: one-to-one):

- | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| ☐ 0 | ☐ 2 | ☐ 4 | ☐ 6 | ☐ 8 | ☐ 10 |
| ☐ 1 | ☐ 3 | ☐ 5 | ☐ 7 | ☐ 9 | ☐ 11 |

Opgave 12 (10%).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

- a. Enhver symmetrisk 4×4 -matrix kan diagonaliseres.

☐ Sand

☐ Falsk

- b. Der findes en lineær transformation $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^5$ som er surjektiv (engelsk: onto).

☐ Sand

☐ Falsk

- c. Der findes en lineær operator $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, med en ortogonal matrix som standardmatrice, således at $T(\mathbf{e}_1) = 4\mathbf{e}_3$, hvor $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ er standardbasen for $\mathbf{R}^3$ (dvs. søjlerne i I_3).

☐ Sand

☐ Falsk

- d. Lad W være et underrum af $\mathbf{R}^5$ med dimension 4. Så udgør enhver ortonormal mængde af 4 vektorer i W en basis for W .

☐ Sand

☐ Falsk

- e. En kvadratisk matrix A er inverterbar (regulær), hvis og kun hvis 0 ikke er en egen værdi for A .

☐ Sand

☐ Falsk