Prøveeksamen B

Opg. 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \\ 50 & 60 \end{bmatrix}$$

1. $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \\ 50 & 60 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 90 & 120 \\ 180 & 240 \end{bmatrix}}}$

2. $B^T A^T = (AB)^T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 90 & 180 \\ 120 & 240 \end{bmatrix}}}$

Opg 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_1+r_3 \to r_3]{-r_1+r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1 \to r_1]{r_2+r_1 \to r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_3 \to r_3]{-r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Dvs. A's reducerede række-echelonform er $R = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$

2. $\det(R) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = \underline{\underline{1}}$

3. $\det(R) = (-1)(-1)\det(A) = \det(A)$ ved Theorem 3.3 side 212.

Dvs. $\det(A) = \underline{\underline{1}}$

Opg. 3

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} r+2s \\ 2s \\ r+2s \end{bmatrix} : r \in \mathbb{R} \text{ og } s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

1. Idet $\begin{bmatrix} r+2s \\ 2s \\ r+2s \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ er $V = Sp\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

Dvs. $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ udspænder V. Da $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ ikke er proportionale, er de lineært uafhængige. Altså er

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \underline{\underline{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}}}$ en basis for V.

2. $\dim(V) = \#$ vektorer i en basis for $V = \underline{\underline{2}}$.

3. $\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1)\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in V$ og $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in V$.

Da $\vec{w}_1$ og $\vec{w}_2$ ikke er proportionale, er de lineært uafhængige. Ved Theorem 4.7 side 248 er $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ en basis for V. Ja

4. $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-r_1+r_3 \to r_3} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ Inkonsistent.

Dvs. ligningen $x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ har ingen løsning, hvormed $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin V$. Dermed er $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ikke en basis for V. Nej

Opg. 4 $\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

1. $\det(A - tI_2) = \begin{vmatrix} -t & 2 \\ 2 & -t \end{vmatrix} = t^2 - 4 = (t+2)(t-2)$.

Egenværdierne er -2 og 2.

2. $\lambda = -2$: $A - (-2)I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Egenrummet hørende til egenværdien -2 er $\mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\lambda = 2$: $A - 2I_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Egenrummet hørende til egenværdien 2 er $\mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

3. Da $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er egenvektorer hørende til forskellige egenværdier, er de lineært uafhængige (alternativ begrundelse: de er ikke proportionale). Da yderligere $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, er $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en basis for $\mathbb{R}^2$ bestående af egenvektorer for A.

Diagonalisering af A:

$$A = PDP^{-1}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Opg. 5

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_1+r_3 \to r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ Pivot i hver søjle, så $\mathcal{B}$ er lineært uafhængig.

Desuden er $\#\mathcal{B} = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Ved Theorem 4.7 side 248 fås at $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.

2.
$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ så $\vec{v} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er lineær og

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

3. $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ og T er lineær, så

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)=T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)-T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}_{*}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}}}.$$

$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ og T er lineær, så

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}_{**}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}}.$$

4. $$\left[T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)\right]_{\mathcal{B}}\overset{*}{=}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\quad \left[T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)\right]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \left[T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)\right]_{\mathcal{B}}\overset{**}{=}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

$$[T]_{\mathcal{B}}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}}}.$$

<u>Opg. 6</u>

$W=\mathrm{Null}(A)$, hvor $A=\begin{bmatrix}1&2&-3\\1&1&-3\end{bmatrix}$, og $\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}$.

1. Vi finder først en basis for W.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-3\\1&1&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_1+r_2\to r_2}\begin{bmatrix}1&2&-3\\0&-1&0\end{bmatrix}\xrightarrow[-r_2\to r_2]{2r_2+r_1\to r_1}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x_1&x_2&x_3\end{array}\\\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$

$\begin{cases}x_1=3x_3\\x_2=0\\x_3 \text{ fri}\end{cases}$, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$; $x_3\in\mathbb{R}$. Basis for W: $\left\{\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

Ved Theorem 6.8 side 395 er $P_W=C(C^TC)^{-1}C^T$, hvor $C=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$.

$$C^TC=\begin{bmatrix}3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}=10,$$

$$P_W=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}\frac{1}{10}\begin{bmatrix}3&0&1\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&1\end{bmatrix}=\underline{\underline{\frac{1}{10}\begin{bmatrix}9&0&3\\0&0&0\\3&0&1\end{bmatrix}}}.$$

2. $\vec{w} = P_W \vec{u} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}}}$

$\vec{z} = \vec{u} - \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0 \\ 0{,}1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0{,}7 \\ 3 \\ -2{,}1 \end{bmatrix}}}$

3. Afstanden fra $\vec{u}$ til W er $\|\vec{z}\| = \sqrt{(0{,}7)^2 + 3^2 + (-2{,}1)^2} = \underline{\underline{\sqrt{13{,}9}}}$

Opg. 7

$$[C \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2r_1 + r_2 \to r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2r_1 + r_2 \to r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 5 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[2r_2 + r_3 \to r_3]{-r_2 + r_1 \to r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-3r_3 + r_2 \to r_2]{r_3 + r_1 \to r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

Dvs. C er inverterbar og $C^{-1} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}}}$.

Opg. 8 $\quad S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ikke pivot i hver søjle, så S er lineært afhængig. <u>Ja</u>

2. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$. Da systemet er inkonsistent, ligger $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ikke i spandet af S. <u>Nej</u>

Opgave 7:(9%) Lad $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Undersøg om C er inverterbar (regulær), og bestem i så fald C^{-1}.

Opgave 8:(8%) Betragt

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

1. Er S lineært afhængig? (Husk, at argumentere for dit svar.)
2. Ligger $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ i spændet af S (the span of S)? (Husk, at argumentere for dit svar.)

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9:(5%)
Der er givet to vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$, som er lineært *uafhængige*. Sæt

$$H = \text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$$

Afkryds det sande udsagn nedenfor.

- [x] H er et underrum af $\mathbf{R}^3$.
- [ ] H kan beskrives som en linie i $\mathbf{R}^3$.
- [ ] Der findes et $c \in \mathbf{R}$, således at enten er $\mathbf{v} = c\mathbf{u}$, eller også er $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$.

Theorem 4.1 side 231.

Opgave 10:(12%)
Der er givet to 3×3-matricer A og B. Det oplyses, at $\det A = 2$ og $\det B = -3$. Besvar nedenstående spørgsmål baseret på disse oplysninger:

a. Bestem værdien af: $\det(-B)$

☐ 0 ☐ -3 ☒ 3 ☐ 2

b. Bestem værdien af: $\det(A^2B)$

☒ -12 ☐ -8 ☐ 12 ☐ 0

c. Bestem værdien af: $\det(A(B^T)^2)$

☐ 1 ☐ -6 ☒ 18 ☐ 9

d. Bestem værdien af: $\det(-AB)$

☒ 6 ☐ -6 ☐ -18 ☐ 2

a. $B \xrightarrow[-r_3 \to r_3]{\substack{-r_1 \to r_1 \\ -r_2 \to r_2}} -B$ så $\det(-B) = (-1)^3 \det(B) = -(-3) = 3$

b. $\det(A^2B) = \det(A^2)\det(B) = \det(A \cdot A)\det(B)$
$= \det(A)\det(A)\det(B) = (\det(A))^2\det(B)$
$= 2^2 \cdot (-3) = -12$

c. $\det(A(B^T)^2) = \det(A)(\det(B^T))^2 = \det(A)(\det(B))^2$
$= 2 \cdot (-3)^2 = 18$

d. $\det(-AB) = \det(A(-B)) = \det(A)\det(-B) = 2 \cdot 3 = 6$

Opgave 11:(8%) Besvar følgende 4 sand/falsk opgaver:

a. Lad W være et underrum af $\mathbf{R}^n$. Hvis $\mathbf{w}$ ligger i både W og $W^\perp$ så gælder at $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

☒ Sand ☐ Falsk

$W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$

b. Betragt ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, hvor A er en 7×8-matrix. Ligningssystemet har uendelig mange løsninger.

☒ Sand ☐ Falsk

Der er mindst en fri variabel, og da $\vec{x} = \vec{0}$ er en løsning, er systemet konsistent.

c. Lad $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$. Hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, så gælder at enten $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ eller $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

☐ Sand ☒ Falsk

$\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ortogonale

d. Lad W være et underrum af $\mathbf{R}^4$ med dimension 3. Det er muligt at vælge et antal vektorer fra W, som udgør en basis for $\mathbf{R}^4$.

☐ Sand ☒ Falsk

Vi kan højst vælge 3 lineært uafhængige vektorer fra W (Theorem 4.6 side 246), og der skal bruges 4 til en basis for $\mathbb{R}^4$.

Opgave 12:(5%) Der er givet tre vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^3$, således at $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ er lineært *uafhængige*, mens $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ er lineært *afhængige*. Sæt

$$H = \text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$$

Afkryds det sande udsagn nedenfor.

☐ Der gælder altid, at $\mathbf{v}$ kan skrives som en linearkombination af $\mathbf{u}$ og $\mathbf{w}$.
☐ Der gælder altid, at $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ er lineært uafhængige.
☒ $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ er ikke en basis for H.

$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ er lineært afhængig.