STUDENTEREKSAMEN MAJ 2008

MATEMATIK
A-NIVEAU

Onsdag den 14. maj 2008

Kl. 09.00 – 14.00

NY ORDNING

STX081-MAA

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-5 med i alt 5 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 6-17 med i alt 19 spørgsmål.

Kun én af opgaverne 17a og 17b må afleveres til bedømmelse.

De 24 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

"I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart, herunder om der i opgavebesvarelsen er:

- en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på
- en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik
- en dokumentation ved et passende antal mellemregninger
- en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde, herunder den eventuelle brug af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder
- en brug af figurer og illustrationer
- en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer
- en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden
- en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og med brug af almindelig matematisk notation."

(*Undervisningsvejledningen til Matematik, Stx*)

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 I planen er der givet to vektorer, $\vec{a} = \begin{pmatrix} t-2 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, hvor t er et tal.

Bestem tallet t, så vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale.

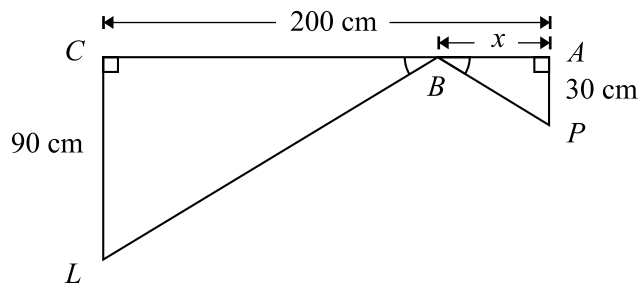
Opgave 2 Bestem værdien af $\dfrac{5m}{2m^2+3mn}$, når $m=1$ og $n=2$, og reducér $\dfrac{5m}{2m^2+3mn}$.

Opgave 3 En funktion f er givet ved $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Bestem $f'(x)$, og bestem monotoniforholdene for f.

Opgave 4 Bestem integralet $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$.

Opgave 5



En lysstråle fra lampen L kastes i punktet B tilbage fra et spejl AC til punktet P. Den vinkelrette afstand fra L til spejlet er 90 cm, og den vinkelrette afstand fra P til spejlet er 30 cm. Det oplyses, at afstanden mellem A og C er 200 cm, og at $\angle ABP = \angle CBL$.

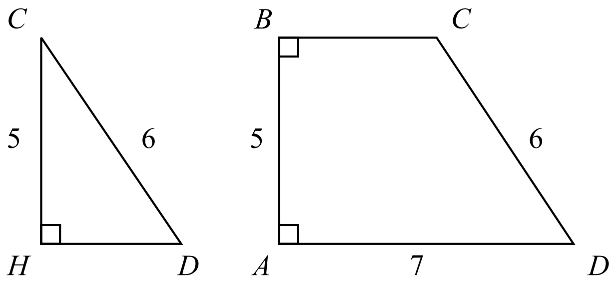
Beregn x, når x betegner afstanden mellem A og B.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 - 14.00

Opgave 6



Ovenfor ses en skitse af trekant *CDH* og firkant *ABCD*.

a) Bestem $\angle D$ i trekant *CDH*.

b) Bestem $|BD|$ og $|AC|$ i firkant *ABCD*.

Opgave 7 I et koordinatsystem i rummet er der givet to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem en ligning for den plan α, der er udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og som indeholder punktet $P(1, 3, -6)$.

En linje *l* er bestemt ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathrm{R}\,,$$

og en plan β er bestemt ved ligningen

$$2x - 3y + z = 7\,.$$

b) Bestem den spidse vinkel mellem *l* og β.

Opgave 8 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 10x^4 + \frac{1}{x}, \qquad x > 0\,.$$

a) Bestem den stamfunktion *F* til f, der opfylder, at $F(1) = 25$.

Opgave 9 I nedenstående tabel ses den forventede levealder for nyfødte i henholdsvis 1900 og 1975.

Årstal	1900	1975
Forventet levealder for nyfødte (år)	46	70

Den forventede levealder (målt i år) for nyfødte kan beskrives ved en lineær funktion f af tiden (målt i antal år efter 1900).

a) Bestem en forskrift for f.

Den forventede levealder (målt i år) for 65-årige kan beskrives ved den lineære funktion

$$g(x) = 0{,}053x + 76\,,$$

hvor x er antal år efter 1900.

b) Benyt funktionerne f og g til at bestemme det år, hvor den forventede levealder for nyfødte er den samme som den forventede levealder for 65-årige.

Kilde: How Long Is the Human Life-Span?, Science, November 15, 1991, *pp* 936-938.

Opgave 10 I 2005 var bevillingerne til forskning og uddannelse i et bestemt land 20 mia. kr. Det bliver besluttet, at disse bevillinger skal stige med en fast årlig procent, så de i 2020 når op på 60 mia. kr.

a) Bestem den årlige procentvise stigning i bevillingerne.

Opgave 11 To funktioner f og g er givet ved

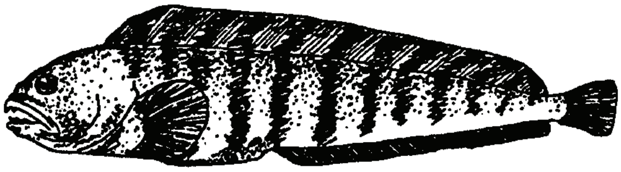
$$f(x) = x^2 - x + 2,$$
$$g(x) = -x^2 + 5x - \frac{5}{2}.$$

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(2, f(2))$.

Det oplyses, at graferne for f og g har netop ét fælles punkt Q.

b) Bestem koordinatsættet til Q.

Opgave 12



Atlantisk havkat (*Anarhichas lupus*)

Længde (cm)	0-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120
Procentdel	0	9	11	0	31	25	19	5

Tabellen viser fordelingen af længden af atlantiske havkatte fanget i dybden 5-40 m i *Gulf of Maine*. Det oplyses, at den korteste og den længste havkat er henholdsvis 51 cm og 120 cm.

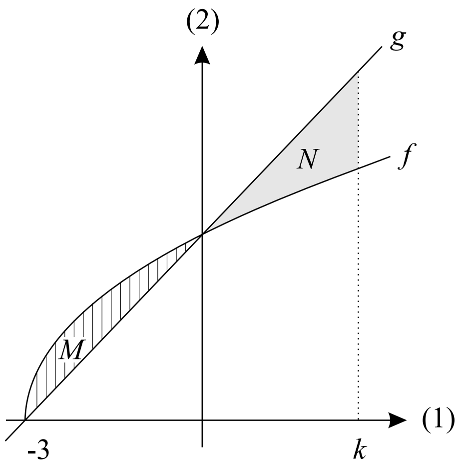
a) Tegn sumkurven, og bestem kvartilsættet.

Kvartilsættet for længden af atlantiske havkatte fanget i dybden 40-80 m er 46 cm, 81 cm og 95 cm. Den korteste og den længste havkat fanget i dette dybdeinterval er henholdsvis 6 cm og 123 cm.

b) Benyt de to kvartilsæt til på samme figur at lave to boksplot for længden af havkatte fanget i de to dybdeintervaller, og kommentér forskellen.

Kilde: Northw. Atl. Fish. Sci., Vol. 13*:* 53–61*, Distribution, Growth and Food Habits of the Atlantic Wolffish (Anarhichas lupus) from the Gulf of Maine-Georges Bank Region, Gary A. Nelson and Michael R. Ross, J.*

Opgave 13 To funktioner f og g har forskrifterne $f(x)=\sqrt{3x+9}$ og $g(x)=x+3$.
Graferne for f og g afgrænser i anden kvadrant en punktmængde *M*, der har et areal.



a) Bestem arealet af *M*.

For $k>0$ afgrænser graferne for de to funktioner sammen med linjen med ligningen $x=k$ i første kvadrant en punktmængde *N*.

b) Bestem *k*, så arealerne af *M* og *N* er lige store.

Opgave 14 I en model kan udviklingen i biltætheden (målt i antal biler pr. 1000 indbyggere) i Danmark i perioden efter 1968 beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}0004 \cdot N \cdot (315 - N) \,,$$

hvor N betegner biltætheden til tiden t (målt i antal år efter 1968).

a) Bestem en forskrift for biltætheden N som funktion af tiden t, idet det oplyses, at biltætheden i 1968 var 198.

b) Giv ved hjælp af den fundne funktion et skøn over biltætheden i 2008, og kommentér resultatet.

Kilde: Transportrådets Notat 99-02 *fra* 1999*, "Personbilparkens udvikling* 1955-2010 *– bestand, nybilsalg og ophugning".*

Opgave 15 I den såkaldte Gompertz model for en bestemt population af kyllinger kan sammenhængen mellem en kyllings vægt M (målt i kg) og kyllingens alder t (målt i døgn efter udklækning) beskrives ved

$$\ln(M) = 1{,}6524 - 4{,}612 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0423\,t} \,.$$

a) Benyt modellen til at bestemme vægten af en kylling, der er 30 døgn gammel, og bestem M som funktion af t.

Kilde: Novak P., L. Zeman, K. Košař, L. Novák: Modelling of Body Mass Increase and Feed Conversion Ratio in Chickens ROSS 208 *. Acta Vet. Brno* 2004, 73: 17-22.

Opgave 16 I en model er antallet P af individer i en bestemt population en funktion af tiden t (målt i døgn). Den hastighed, hvormed P vokser til tidspunktet t, er proportional med produktet af antallet af individer til tidspunktet t og forskellen mellem 2600 og antallet af individer til tidspunktet t.
Det oplyses, at væksthastigheden er 10, når der er 100 individer i populationen.

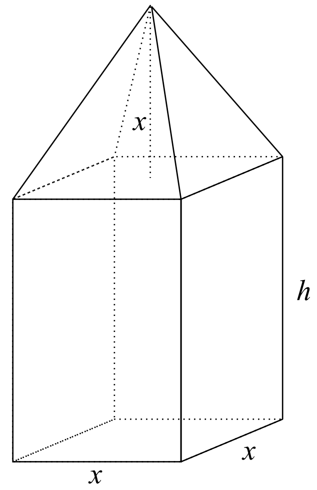
a) Opskriv en differentialligning, som P må opfylde.

Opgave 17a En bestemt type af beholdere har form som vist på figuren. For en beholder af denne type, hvor rumfanget skal være 100 cm^3, gælder, at

$$\tfrac{1}{3}x^3 + hx^2 = 100 \text{ og}$$
$$S = \left(1+\sqrt{5}\right)x^2 + 4xh\,,$$

hvor S er beholderens overflade (målt i cm^2), og hvor h (målt i cm) og x (målt i cm) er angivet på figuren.

a) Bestem S udtrykt ved x, og bestem x, så beholderens overfladeareal bliver mindst mulig.



Opgave 17b I et koordinatsystem i rummet er en kugle K givet ved ligningen

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 2z = 36\,,$$

og en linje l er bestemt ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathrm{R}\,.$$

a) Undersøg, om l er tangent til K.

Kun én af opgaverne 17a og 17b må afleveres til bedømmelse