UNDERVISNINGS
MINISTERIET

Matematik A

Studentereksamen

2stx101-MAT/A-01062010

Tirsdag den 1. juni 2010
kl. 9.00 - 14.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-15 med i alt 19 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. **TEKST**
   Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. **NOTATION og LAY-OUT**
   Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. **REDEGØRELSE og DOKUMENTATION**
   Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. **FIGURER**
   I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. **KONKLUSION**
   Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

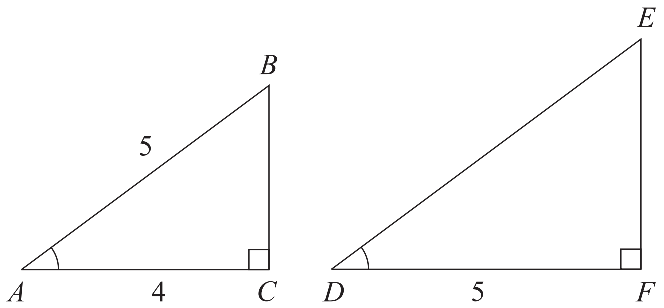
Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 Reducér udtrykket $a^2 - b^2 - (a+b)^2 + 2ab$.

Opgave 2 Bestem tallet t, så vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5t-1 \\ 3 \end{pmatrix}$ er ortogonale.

Opgave 3



På figuren ses to ensvinklede trekanter ABC og DEF, der begge er retvinklede. Nogle af sidelængderne er angivet på figuren.

Bestem $|EF|$.

Opgave 4 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^4 + \ln(2x+1) .$$

Bestem $f'(1)$.

Opgave 5 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3+1}{y} ,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(2,4)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P.

Opgave 6 Bestem integralet $\int 2x \cdot (x^2+1)^5 \, dx$.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 - 14.00

Opgave 7 I et koordinatsystem er givet to punkter $P(3,1)$ og $Q(20,7)$ samt en vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

a) Bestem en ligning for den linje, der går gennem *P*, og som står vinkelret på $\vec{a}$.

b) Bestem arealet af det parallelogram, der udspændes af vektorerne $\overrightarrow{PQ}$ og $\vec{a}$.

c) Bestem koordinatsættet til projektionen af $\overrightarrow{PQ}$ på $\vec{a}$.

Opgave 8 Funktionen $f(x) = b \cdot x^a$ opfylder, at

$$f(32) = 402 \text{ og } f(243) = 603 .$$

a) Bestem tallene *a* og *b*.

Opgave 9 I et eksperiment med en bestemt farve lys måles sammenhørende værdier af lysintensitet og væskedybde.
Tabellen nedenfor viser sammenhørende værdier af lysintensitet *I* (angivet i %) og væskedybde *d* (målt i cm).

d	1,0	3,0	4,0	5,0	7,0	10,0	15,0
I	95,1	86,0	81,9	77,9	70,5	60,7	47,2

I en model antages, at tabellens data kan beskrives ved en funktion af typen

$$I(d) = I_0 \cdot a^d .$$

a) Benyt tabellens data til at bestemme tallene I_0 og *a*.

b) Bestem halveringskonstanten.

Opgave 10 I trekant *ABC* er *D* skæringspunktet mellem vinkelhalveringslinjen for vinkel *B* og siden *AC*. Det oplyses, at $\angle A = 70$ og $|AB| = |BD| = 5$.

a) Tegn en skitse af trekant *ABC*, og bestem $\angle ADB$ samt $|AD|$.

b) Bestem $|BC|$.

Opgave 11 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (x+1) \cdot \mathrm{e}^{-x} .$$

a) Bestem monotoniforholdene for f.

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets akser i anden kvadrant en punktmængde M, der har et areal.

b) Bestem arealet af M.

c) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.

Opgave 12 I et koordinatsystem i rummet er planen α bestemt ved ligningen

$$2x - y - 2z - 6 = 0 .$$

Linjen l går gennem koordinatsystemets begyndelsespunkt O og punktet $P(7,3,-2)$.

a) Bestem den spidse vinkel mellem planen α og linjen l.

b) Bestem en ligning for den kugle, der har centrum i P, og som tangerer α.

c) Bestem koordinatsættet til det punkt Q, som er projektionen af P på α.

Opgave 13 I en model betegner V vægten af en gris til tidspunktet t. I modellen antages det, at V er løsning til differentialligningen

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}000193V(139{,}6 - V) ,$$

hvor V måles i kg, og t måles i døgn efter at grisen er begyndt at indtage fast føde.

Grisens vægt er 7,3 kg, når den begynder at indtage fast føde.

a) Bestem en forskrift for V.

b) Bestem ved hjælp af modellen grisens vægt til det tidspunkt, hvor væksthastigheden er størst.

Kilde: www.infosvin.dk

Opgave 14 En linje l har ligningen

$$y = -2x + 1.$$

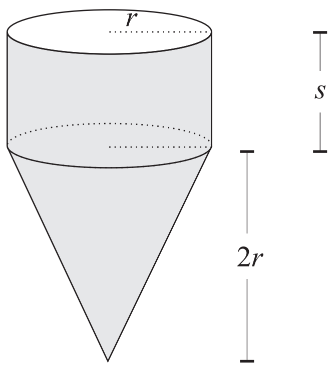
Det oplyses, at linjen l er tangent til grafen for funktionen

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

i punktet $P(1, f(1))$.

a) Gør rede for, at $f'(1) = -2$ og $f(1) = -1$, og bestem tallene b og c.

Opgave 15 En tragt er sammensat af en åben cylinder og en kegle (se figuren). Keglens grundflade og cylinderen har samme radius r, målt i dm. Keglens højde er det dobbelte af dens radius. Tragten kan rumme 40 dm^3.



Fra formelsamling (Kegle)

h højde
r grundfladeradius

Krum overflade $\pi r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$

Rumfang $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

a) Bestem cylinderens højde s som funktion af r, og gør rede for, at tragtens overflade O som funktion af r kan beskrives ved

$$O(r) = \pi(\sqrt{5} - \frac{4}{3}) \cdot r^2 + \frac{80}{r}.$$

b) Bestem r, således at tragtens overflade er mindst mulig, når $0 < r < 4$.