Omprøve i Matematik – Geometriske Grundbegreber

M-sektorens 4. semester

Mandag, den 26. August 2002, kl. 9:00 – 12:00

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages.
PC er ikke tilladt.

Opgave 1: (40%) En rumkurve er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}\ (t) = \overrightarrow{OP}_t = [t\cos t, t\sin t, t^2], \quad t \in \mathbf{R}.$$

1. Gør rede for at kurven ligger på paraboloiden med ligningen
$$z = x^2 + y^2.$$
2. Beregn hastigheden $\mathbf{r}\ '(t)$ og gør rede for, at $v(t) = \sqrt{1+5t^2}$.
3. Beregn $\mathbf{r}\ '(t) \times \mathbf{r}\ ''(t)$ og gør rede for, at
$$\|\mathbf{r}\ '(t) \times \mathbf{r}\ ''(t)\| = \sqrt{5t^4 + 16t^2 + 8}.$$
4. Beregn i punktet $P_0(0,0,0)$
   - Enhedstangentvektoren $\mathbf{t}$
   - Binormalvektoren $\mathbf{b}$
   - Hovednormalvektoren $\mathbf{n}$.
5. Beregn i et vilkårligt punkt P_t krumningen $\kappa(t)$.
6. Beregn i punktet P_0 koordinaterne til osculationscirklens centrum C_0.

Opgave 2: (20%) En naturlig kubisk spline bestemmes ved de tre punkter $P_0 : [4,0], P_1 : [-4,4]$ og $P_2 : [-4,-4]$.

1. Beregn hastighedsvektoreren $\mathbf{v}_1$ i P_1 og gør rede for, at hastighedsvektorerne i de to andre punkter er givet ved $\mathbf{v}_0 = [-10,7]$, hhv. $\mathbf{v}_2 = [2,-11]$.

2. Bestem en parameterfremstilling for den del af kurven der forbinder punkterne P_0 og P_1.

3. Bestem projektionen af vektoren $\mathbf{v_0}$ på vektoren $\mathbf{v_2}$.

Opgave 3: (40%) Grafen for funktionen

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ f(u,v) = v^3 - 3vu^2$$

er en flade S med parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u,v) = \overrightarrow{OP_{u,v}} = [u, v, v^3 - 3vu^2], \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

1. Gør rede for, at fladens snit med XY-planen består af de tre rette linier givet ved ligningerne

$$l_1 : Y = 0; \qquad l_2 : Y = \sqrt{3}X; \qquad l3 : Y = -\sqrt{3}X.$$

2. Beregn koefficienterne i fladens 1. fundamentalform. Gør rede for, at $(EG - F^2)(u,v) = 1 = 9(u^2 + v^2)^2$. I hvilke punkter skærer fladens parameterkurver hinanden i en ret vinkel?

3. Beregn koefficienterne i fladens 2. fundamentalform.

4. Gør rede for at alle punkter på fladen S på nær et enkelt er hyperbolske. Gør rede for, at $O = (0,0,0)$ er et planpunkt (planar).

Husk at skrive navn og gruppenummer på besvarelserne. **Og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelserne.