Omprøve i Matematik – Geometriske Grundbegreber

M-sektorens 4. semester

Mandag, den 25. August 2003, kl. 9:00 – 12:00

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages.
PC er ikke tilladt.

Opgave 1: (35%) En plan kurve er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_t} = [\cos^3(t), \sin^3(t)], \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Kurven er tegnet fuldt optrukket i vedlagte figur.

1. Bestem kurvens hastighedesvektor $\mathbf{r}'(t)$ og gør rede for at farten $v(t)$ i punktet P_t er givet ved
$$v(t) = 3\sin(t)\cos(t) = \frac{3}{2}\sin(2t).$$
2. Beregn længden l af kurvestykket mellem $P_0 : (1, 0)$ og $P_{\frac{\pi}{2}} : (0, 1)$ og sammenlign den med længden L af kvartcirklen (stiplet i figuren).
3. Det oplyses at accelerationsvektoren i punktet P_t er på formen $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = [3\cos(t)(3\sin^2(t) - 1), 3\sin(t)(3\cos^2(t) - 1)]$. Gør rede for at krumningen i punktet P_t er givet ved
$$\kappa(t) = \frac{-1}{3\sin(t)\cos(t)} = \frac{-2}{3\sin(2t)}, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$
I hvilket punkt er krumningens absolutte værdi $|\kappa(t)|$ *mindst*?
4. Bestem hastighedsvektoren $\mathbf{v}(\frac{\pi}{4})$ og acclerationsvektoren $\mathbf{a}(\frac{\pi}{4})$ i punktet $P_{\frac{\pi}{4}} : (\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$. Eftervis ved udregning, at disse to vektorer står vinkelret på hinanden. Indtegn begge vektorer i vedlagte kurvetegning (afleveres).

Opgave 2: (25%) De tre punkter $P_0 : (0,0), P_1 : (0,4)$ og $P_2 : (4,0)$ bestemmer en naturlig kubisk spline.

1. Beregn hastighedsvektorerne $\mathbf{v_0}$ i P_0, $\mathbf{v_1}$ i P_1 og $\mathbf{v_2}$ i P_2.

2. Gør rede for, at den del af kurven der forbinder punkterne P_0 og P_1 har parameterfremstillingen

$$\mathbf{p}_1(t) = [t^3 - t, -2t^3 + 6t], \quad 0 \leq t \leq 1,$$

   og bestem parameterfremstillingen for den anden del af kurven.

3. Beregn i punktet P_1 krumningen κ og bestem koordinaterne til krumningscirkelens centrum. Bestem endvidere en ligning for krumningscirklen.

Opgave 3: (40%) En flade F er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u,v) = \overrightarrow{OP_{u,v}} = [u + v, u^2 + 2uv, \frac{2}{3}u^3 + 2u^2v], \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in \mathbf{R}_+.$$

1. Beregn koefficienterne i fladens 1. fundamentalform.

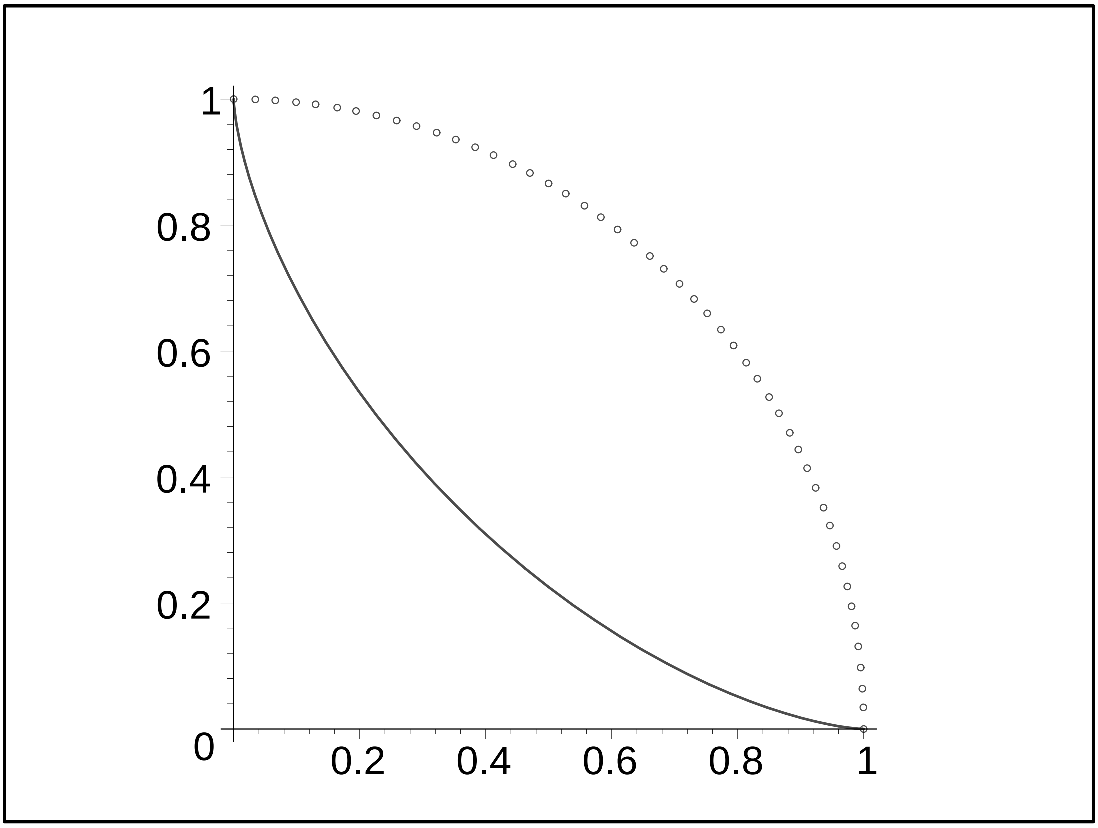
2. Beregn normalvektoren $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$, og vis at $\|\mathbf{N}\| = 2v(1 + 2u^2)$.

3. Bestem en ligning for fladens tangentplan i punktet $P_{1,1} = (2, 3, 2\frac{2}{3})$.

4. Beregn koefficienterne i fladens 2. fundamentalform.

5. Gør rede for at Gausskrumningen $K = 0$ i alle fladens punkter.

Husk at skrive navn og gruppenummer på besvarelserne. **Og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelserne.


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1