Omprøve i Matematik – Geometriske Grundbegreber

M-sektorens 4. semester

Torsdag, den 26. August 2004, kl. 9:00 – 12:00

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages.
PC er ikke tilladt.

Opgave 1: (36%) En rumkurve er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_t} = [t, \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}, t^2], \quad t > 0.$$

1. Beregn hastighedsvektoren $\mathbf{r}'(t)$ og gør rede for at farten er givet ved $v(t) = 1 + 2t$.

2. Bestem længden af kurveafsnittet mellem $P_1 : (1, \frac{4}{3}, 2)$ og $P_2 : (2, \frac{8\sqrt{2}}{3}, 4)$.

3. Beregn $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$, og vis at $\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| = \frac{1+2t}{\sqrt{t}}$.

4. Beregn krumningsfunktionen $\kappa(t)$ og torsionsfunktionen $\tau(t)$. Gør rede for at de er éns og går mod 0 når t går mod ∞.

5. Beregn i ethvert punkt enhedstangentvektoren $\mathbf{t}(t)$ og binormalvektoren $\mathbf{b}(t)$. Gør rede for at begge vektorer danner en konstant vinkel på $\frac{\pi}{4}$ med vektoren $\mathbf{u} = [1, 0, 1]$ for alle $t > 0$.

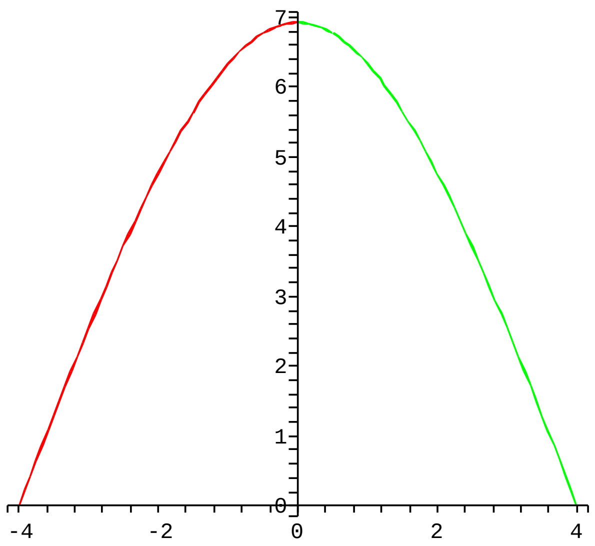
Opgave 2: (28%) De tre punkter $P_0 : (-4, 0), P_1 : (0, 4\sqrt{3})$ og $P_2 : (4, 0)$ – som danner en ligesidet trekant – bestemmer en naturlig kubisk spline; se tegningen på side 2.

1. Gør rede for at hastighedsvektorerne $\mathbf{v_0}$ i P_0, $\mathbf{v_1}$ i P_1 og $\mathbf{v_2}$ i P_2 er givet ved $\mathbf{v_0} = [4, 6\sqrt{3}], \mathbf{v_1} = [4, 0]$ og $\mathbf{v_2} = [4, -6\sqrt{3}]$. Forklar ved et symmetriargument, hvorfor man på forhånd ved, at vektoren $\mathbf{v_1}$ er vandret.

2. Gør rede for at de to parameterfremstillinger som udgør splinekurven er givet ved

$$\mathbf{p_1}(t) = [4t - 4, \sqrt{3}(-2t^3 + 6t)], \text{ hhv.}$$
$$\mathbf{p_2}(t) = [4t, \sqrt{3}(2t^3 - 6t^2 + 4)].$$

(Vink: Det er ikke nødvendigt at bruge formler for kubiske parameterfremstillinger).



3. Find accelerationsvektorerne for parameterfremstillingerne i P_0, P_1 og P_2. (Vink: Det er ikke nødvendigt at beregne dem i yderpunkterne P_0 og P_2.) Bestem splinekurvens plane krumning i punktet P_1 samt en ligning for kurvens krumningscirkel gennem dette punkt.

Opgave 3: (36%) En flade S er i et sædvanligt koordinatsystem givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u,v) = \overrightarrow{OP}_{u,v} = [u+v, \frac{1}{2}u^2 + uv, \frac{1}{3}u^3 + u^2v], \quad u \in \mathbb{R}, \quad v > 0.$$

1. Beregn koefficienterne i fladens 1. fundamentalform.
2. Bestem i punktet $P_{1,1} = (2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3})$ en ligning for fladens tangentplan.
3. Beregn i punktet $P_{1,1}$ koefficienterne i fladens 2. fundamentalform.
4. Beregn i samme punkt Gausskrumningen K og middelkrumningen H samt hovedkrumningerne κ_1 og κ_2.

Husk at skrive navn og gruppenummer på besvarelserne. **Og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelserne.