Prøve i Matematik – Geometriske Grundbegreber
M-sektorens 4. semester
Onsdag, den 1. juni 2005, kl. 9:00 – 12:00

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages.
PC er ikke tilladt.

Opgave 1: (38%) En rumkurve K er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP}_t = [t\cos t, t\sin t, \frac{1}{2}t^2], \quad t \in \mathbf{R}.$$

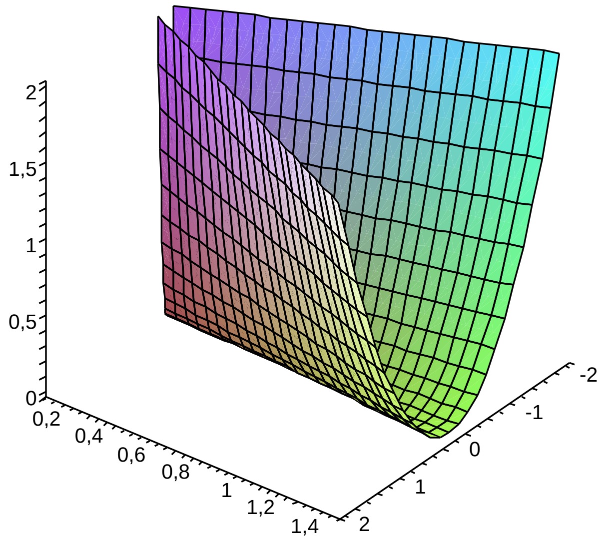
1. Beregn i punktet P_t hastighedsvektoren $\mathbf{v}(t)$ og vis, at farten er givet ved $v(t) = \sqrt{1+2t^2}$.
2. Beregn i punktet P_0 enhedstangentvektor $\mathbf{t}$, binormalvektor $\mathbf{b}$ og hovednormalvektor $\mathbf{n}$.
3. Beregn i punktet P_0 kurvens krumning og torsion.
4. Bestem en ligning for kurvens oskulationsplan i punktet P_0; bestem i denne plan centrum for kurvens oskulationscirkel gennem P_0.
5. Gør rede for at K ligger på omdrejningsparaboloiden med ligningen $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Opgave 2: (24%)

1. En Fergusonkurve er givet ved en kubisk parameterfremstilling $\mathbf{p}_1(t)$. Kurven begynder i $P_0 : (6, -6)$, ender i $P_1 : (-6, 6)$ og har hastighedsvektorer $\mathbf{v}_0 = \mathbf{p}_1'(0) = [-18, 15]$ i P_0, hhv. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{p}_1'(1) = [0, 6]$ i P_1. Gør rede for at $\mathbf{p}_1(t) = [6t^3 - 18t + 6, -3t^3 + 15t - 6], 0 \le t \le 1$.
2. En Bézierkurve (af orden 3) har støttepunkter $Q_0 : (-6, 6), Q_1 : (-6, 8), Q_2 : (0, 7)$ og $Q_3 : (6, 6)$. Gør rede for at Bézierkurven har en parameterfremstilling $\mathbf{p}_2(t) = [-6t^3 + 18t^2 - 6, 3t^3 - 9t^2 + 6t + 6], 0 \le t \le 1$.
3. Gør rede for at de to parameterfremstillinger $\mathbf{p}_1(t)$ og $\mathbf{p}_2(t)$ *tilsammen* beskriver den naturlige kubiske spline gennem de tre punkter $P_0 : (6, -6), P_1 = Q_0 : (-6, 6)$ og $Q_3 : (6, 6)$.

Opgave 3: (38%) En flade S er givet ved parameterfremstillingen

$$[X, Y, Z] = \overrightarrow{OP_{uv}} = \mathbf{r}(u, v) = [uv, u, v^2], \; u > 0.$$



1. Beregn koefficienterne i fladens 1. fundamentalform.

2. Bestem enhedsnormalvektoren $\nu(u, v)$ i P_{uv} og koefficienterne i fladens 2. fundamentalform.

3. Beregn Gausskrumningen $K(u, v)$ i punktet $P_{u,v}$. Hvilke punkter på fladen er elliptiske, parabolske, hyperbolske?

4. For $v = 0$ ligger $P_{u0} : (0, u, 0)$ på Y-aksen. Gør rede for at fladens tangentplan i P_{u0} er lig med XY-planen. Bestem middelkrumningen H og hovedkrumningerne k_1 og k_2 i P_{u0}.

5. Gør rede for at koordinaterne (X, Y, Z) til ethvert punkt P_{uv} på fladen S opfylder ligningen $X^2 = ZY^2$.

Husk at skrive navn og gruppenummer på besvarelserne. **Og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelserne.