

Omprøve i Matematik – Geometriske Grundbegreber

M-sektorens 4. semester

Fredag, den 26. august 2005, kl. 9:00 – 12:00

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages.

PC er ikke tilladt.

Opgave 1: (42%) En rumkurve er givet ved parameterfremstillingen

$$\overrightarrow{OP}_t = \mathbf{r}(t) = [e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t], \quad t \in \mathbf{R}.$$

1. Beregn hastighedsvektoren $\mathbf{v}(t)$, gør rede for at farten er givet ved $v(t) = \sqrt{3}e^t$ og bestem enhedstangentvektoren $\mathbf{t}(t)$.
2. Beregn længden af kurvestykkene mellem $P_{-2\pi}$ og P_0 , hhv. P_0 og $P_{2\pi}$. Kommenter forholdet mellem resultaterne.
3. Beregn accelerationsvektoren $\mathbf{r}''(t)$ og krydsproduktet $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$. Gør rede for at denne vektor har længde $\sqrt{6}e^{2t}$ og bestem binormalvektoren $\mathbf{b}(t)$ og hovednormalvektoren $\mathbf{n}(t)$.
4. Beregn kurvens krumningsfunktion $\kappa(t)$ og torsionsfunktion $\tau(t)$. Gør rede for at de går mod ∞ når t går mod $-\infty$.
5. Gør rede for at kurven ligger på fladen givet ved ligningen $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$.

Opgave 2: (25%) En trekant $\triangle ABC$ er givet ved: $A(0,0)$, $B(2,5)$ og $C(9,5)$. I trekanten skal der konstrueres en kubisk (Ferguson)kurve, der forbinder A med C på en sådan måde at \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{BC} er hastighedsvektorer i henholdsvis kurvens startpunkt og slutpunkt.

1. Bestem den kubiske parameterfremstilling $\mathbf{p}(t)$, $t \in [0, 1]$, for kurven.

Nu betragtes i stedet den naturlige kubiske spline, der forbinder de tre punkter $P_0 = A$, $P_1 = B$ og $P_2 = C$.

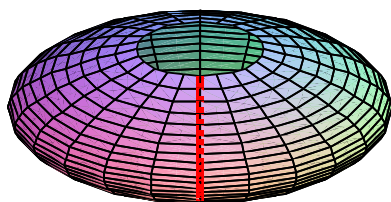
2. Beregn de tre tangentvektorer \mathbf{v}_0 , \mathbf{v}_1 og \mathbf{v}_2 i P_0 , P_1 , hhv. P_2 .

3. Beregn parameterfremstillingen for det kurvestykke, der forbinder $P_0 = A$ med $P_1 = B$.

Opgave 3: (33%) En omdrejningsflade S er givet ved parameterfremstillingen

$$[X, Y, Z] = \mathbf{r}(u, v) = \overrightarrow{OP}_{u,v} = [(6 - v^2) \cos u, (6 - v^2) \sin u, v], \quad -2 < v < 2, \quad 0 \leq u < 2\pi.$$

Se figuren



1. Beregn koefficienterne i fladens 1. fundamentalform.
2. Beregn koefficienterne i fladens 2. fundamentalform. Gør rede for at alle punkter på fladen S er elliptiske.
3. Beregn i de punkter hvor $v = 0$ middelkrumningen H og Gausskrumningen K samt hovedkrumningerne k_1 og k_2 .
4. Gør rede for at fladens fællesmængde med XZ -planen er en kurve, der for $x > 0$ har ligningen $X = 6 - Z^2$.

Husk at skrive navn og gruppenummer på besvarelsene. **Og skriv antallet af afleverede ark på 1. side af besvarelsene.**