

Omprøve i Matematik – Geometriske Grundbegreber

M-sektorens 4. semester

Fredag, den 25. august 2006, kl. 9:00 – 12:00

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages.
PC er ikke tilladt.

Opgave 1: (36%)

En rumkurve C er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP}_t = [\ln(t), \sqrt{2}t, \frac{t^2}{2}], \quad t > 0.$$

1. Vis at farten er givet ved $v(t) = \frac{t^2+1}{t}$.
2. Bestem længden af kurvestykket mellem $P_1 : (0, \sqrt{2}, \frac{1}{2})$ og $P_2 : (\ln(2), 2\sqrt{2}, 2)$ og afstanden mellem disse to punkter.
3. Bestem de tre vektorer $\mathbf{t}(t)$, $\mathbf{n}(t)$ og $\mathbf{b}(t)$ i det medfølgende koordinatsystem (treben) langs med kurven C .
4. Gør rede for at krumningen $\kappa(t)$ og torsionen $\tau(t)$ opfylder $\kappa(t) = \tau(t) = \frac{\sqrt{2}t}{(t^2+1)^2}$ og at de går mod 0 når t går mod 0, hhv. ∞ .

Opgave 2: (24%)

En kubisk spline går gennem punkterne

$P_0 : (-1, 0)$, $P_1 : (0, 0)$ og $P_2 : (a, b)$.

1. Vis at hastighedsvektorerne i disse tre punkter er givet ved $\mathbf{v}_0 = \frac{1}{4}[5 - a, -b]$, $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}[a + 1, b]$ og $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{4}[5a - 1, 5b]$.
2. Bestem parameterfremstillingen $p_1(t) = [x(t), y(t)]$, $0 \leq t \leq 1$ for kurvestykket der forbinder P_0 og P_1 .
3. Gør rede for, at anden koordinaten $y(t)$ i $p_1(t)$ opfylder:
 $y(t) \leq 0$ når $b \geq 0$ og $y(t) \geq 0$ når $b \leq 0$ for $0 \leq t \leq 1$.
Giv en interpretation, for eksempel ved hjælp af en tegning.

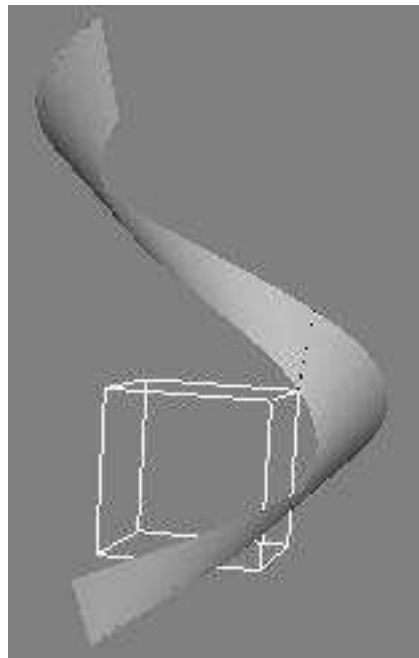
Opgave 3: (40 %)

En flade S er givet ved parameterfremstillingen

$$[X, Y, Z] = \overrightarrow{OP_{uv}} = \mathbf{r}(u, v) = [\cos(u) - v \sin(u), \sin(u) + v \cos(u), u + v]$$

med $u, v \in \mathbf{R}, v > 0$.

1. Gør rede for, at v -parameterkurverne ($u = \text{konstant}$) er rette linier.
2. Bestem fladens enhedsnormalvektor i punktet P_{uv} . Gør rede for at disse normalvektorer er éns langs med enhver v -parameterkurve.
3. Bestem koefficienterne E, F, G i fladens første fundamentalform og gør rede for at $EG - F^2 = 2v^2$ i punktet P_{uv} .
4. Bestem arealet af det fladestykke som afgrænses af parameterkurverne svarende til $u = -\pi, u = \pi, v = 1$ og $v = 2$; se Figur 1 nedenfor.



Figur 1: Arealet af dette fladestykke ønskes beregnet.

5. Bestem i hvert punkt P_{uv} af fladen S Gausskrumningen K , middelkrumningen H samt de to hovedkrumninger k_1 og k_2 .