Omprøve i Matematik – Geometriske Grundbegreber

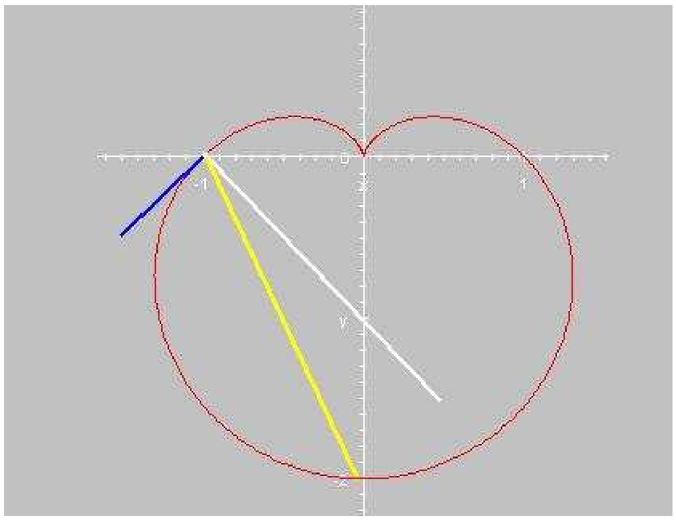
M-sektorens 4. semester

Mandag, den 27. august 2007, kl. 9:00 – 12:00

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages. PC er ikke tilladt.

Opgave 1: (40%)
En plan kurve C – en såkaldt kardioide, se Figur 1 – er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_t} = [(1-\sin t)\cos t, (1-\sin t)\sin t],\ t \in]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$



Figur 1: Kardioiden C (med accelerationsvektorer $\mathbf{a}, \mathbf{a_t}, \mathbf{a_n}$)

1. Bestem hastighedsvektoren $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ i P_t og gør rede for at farten $v(t)$ i P_t er givet ved $v(t) = \sqrt{2}\sqrt{1-\sin t}$.
2. Bestem accelerationsvektoren $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ i P_t og gør rede for at den numeriske acceleration $a(t)$ er givet ved $a(t) = \sqrt{5-4\sin t}$.
3. Gør rede for at krumningen i P_t er givet ved $\kappa(t) = \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{1-\sin t}}$.
4. Eftervis, at størrelsen af den tangentielle acceleration i P_t er givet ved $|a_{\mathbf{t}}(t)| = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\sin t}$ og at størrelsen af den normale acceleration i P_t er givet ved $|a_{\mathbf{n}}(t)| = \frac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt{1-\sin t}$.
5. Bestem grænseværdierne for $P_t, v(t), \kappa(t), a(t), |a_{\mathbf{t}}(t)|$ og $a_n(t)$, når t går mod $\frac{\pi}{2}$.

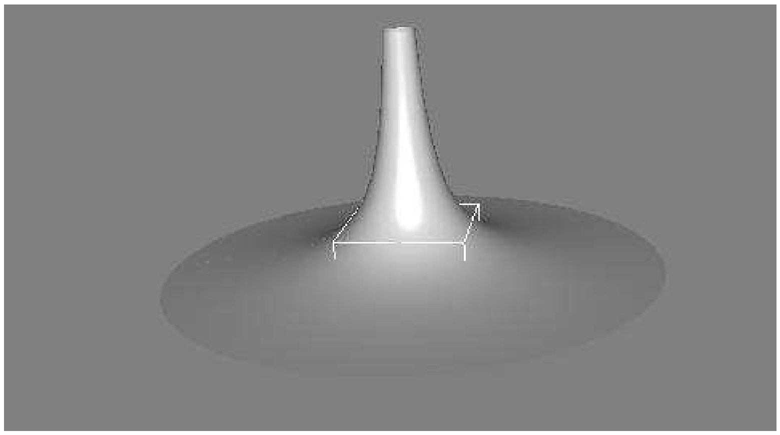
Opgave 2: (24%)
En naturlig kubisk spline i planen gennem tre punkter P_0, P_1 og P_2 er givet ved to polynomielle parameterfremstillinger $\mathbf{p}_1(t)$ og
$\mathbf{p}_2(t) = [1 - 3t^2 + t^3, t - 6t^2 + 2t^3],\ 0 \leq t \leq 1$.

1. Gør rede for, at $P_1 : (1, 0), P_2 : (-1, -3)$ med hastighedsvektorer $\mathbf{v}_1 = [0, 1], \mathbf{v}_2 = [-3, -5]$.
2. Gør rede for, at $P_0 : (-1, -5)$ og $\mathbf{v}_0 = [3, 7]$ ved at udnytte sammenhænge mellem punkter og hastighedsvektorer for en kubisk spline.
3. Bestem parameterfremstillingen $\mathbf{p}_1(t)$ for den første halvdel af splinekurven.

Opgave 3: (36 %)
En omdrejningsflade S er givet ved parameterfremstillingen

$$[X,Y,Z] = \overrightarrow{OP_{uv}} = [\cos(u)v, \sin(u)v, \frac{1}{v}], \; u,v \in \mathbf{R}, v > 0.$$

På Figur 2 nedenfor vises et udsnit af fladen S.



Figur 2: Lampefladen S

1. Bestem en ligning for tangentplanen $T_{P_{0v}}$ til S i punktet $P_{0v} : (v, 0, \frac{1}{v})$. Bestem $\cos\alpha_v$, når α_v betegner vinklen mellem $T_{P_{0v}}$ og XY-planen. Gør rede for at $T_{P_{0v}}$ nærmer sig en horizontal plan for $v \to \infty$ og en vertikal plan når $v \to 0$.

2. Bestem koefficienterne til første og anden fundamentalform for fladen S i punktet P_{uv}.

3. Bestem Gausskrumningen $K(u,v)$ og middelkrumningen $H(u,v)$ i et punkt P_{uv} på fladen. Gør rede for at alle punkter på fladen er hyperbolske. Hvordan kan man se det på figuren?

4. Gør rede for at punktet $P_{u1}, u \in \mathbf{R}$ ligger på en enhedscirkel i planen $Z = 1$. Det fremgår af resultatet i 3. (og oplyses hermed) at $K(u,1) = -\frac{1}{2}$ og $H(u,1) = 0$. Bestem hovedkrumningerne i punktet P_{u1}.