Prøve i Matematik – Geometriske Grundbegreber

M-sektorens 4. semester

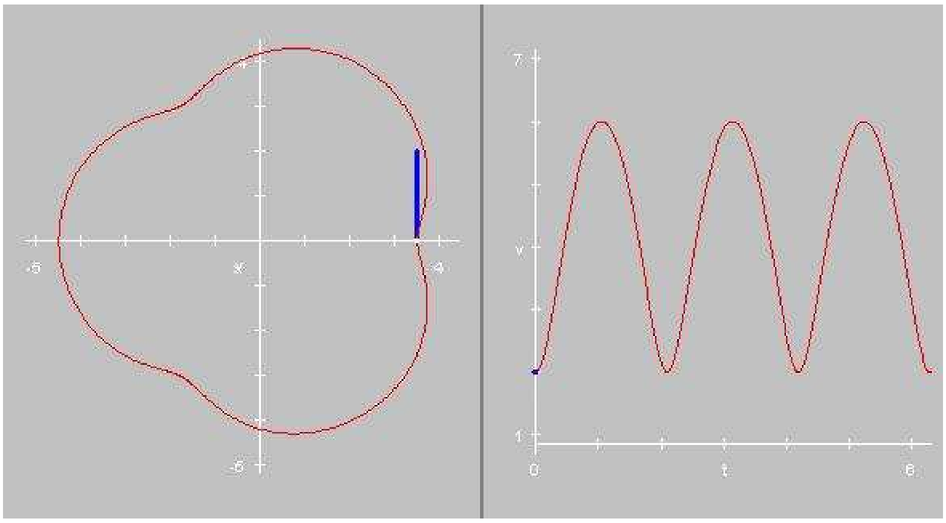
Tirsdag, den 3. juni 2008, kl. 9:00 – 12:00

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages. PC er ikke tilladt.

Opgave 1: (40%)
En lukket plan kurve C er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP}_t = [4\cos t - \frac{1}{2}\cos(4t), 4\sin t - \frac{1}{2}\sin(4t)],\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Det drejer sig om en epitrochoide som bruges i Wankel-motorer; se Figur 1 nedenfor.



Figur 1: Epitrochoidekurve og farten af bevægelsen langs med den

Vink: Brug den trignonmetriske formel i fodnoten[1].

1. Gør rede for at farten i punktet P_t er givet ved $v(t) = 2\sqrt{5 - 4\cos(3t)}$. Gør desuden rede for at den numeriske acceleration $a(t) = |\mathbf{r}''(t)|$ opfylder $a(t) = 2v(t)$. Bestem den største og mindste fart og numeriske acceleration for bevægelsen langs med kurven og de punkter hvor disse antages.

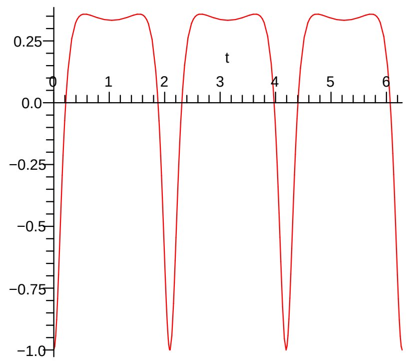
2. Gør rede for at krumningen i P_t er givet ved

$$\kappa(t) = \frac{4 - 5\cos(3t)}{(5 - 4\cos(3t))^{\frac{3}{2}}}.$$

3. Krumningsfunktionen $\kappa(t)$ er tegnet i Figur 2. Den antager således både positive og negative værdier. Hvor på kurven er krumningen

[1] $\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$

negativ? (Tegn eller beskriv de værdier t hvor dette er tilfældet!) Over store intervaller er krumningen næsten konstant positiv. Hvordan fremgår det af epitrochoidekurvens form?



Figur 2: Epitrochoidekurvens krumningsfunktion

4. Beregn den tangentiale acceleration $a_{\mathbf{t}}(t)$ i punktet P_t. I hvilke punkter på kurven er den tangentiale acceleration lig med 0? Hvor stor er den normale acceleration $a_{\mathbf{n}}$ i disse punkter?

Opgave 2: (20%)
Lad $a, b > 0$ betegne reelle tal. En kubisk parameterfremstilling (Fergusonkurve) $\mathbf{p}(t) = [x(t), y(t)], 0 \leq t \leq 1$ bestemmer en plan kurve der forbinder $P_0 : (-1, a)$ med $P_1 : (1, a)$. Den antager hastighedsvektorer $\mathbf{v}_0 = [1, -b]$ i P_0 og $\mathbf{v}_1 = [1, b]$ i P_1.

1. Bestem den første koordinatfunktion $x(t)$ for $\mathbf{p}(t)$ og kontroller at den er uafhængig af a og b.

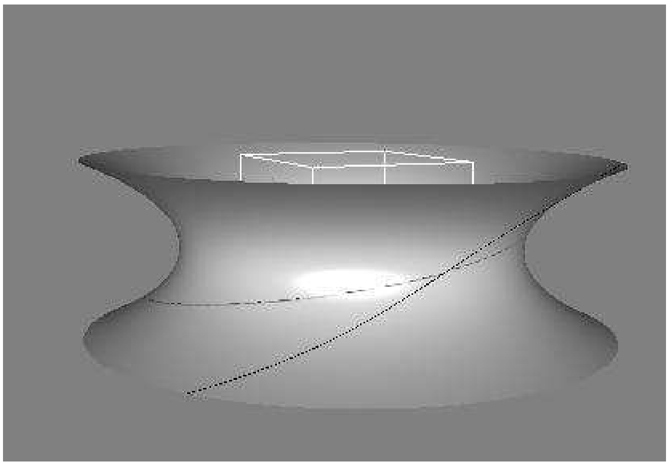
2. Gør rede for at den anden koordinatfunktion $y(t)$ for $\mathbf{p}(t)$ er givet ved $y(t) = bt^2 - bt + a$.

3. Gør rede for at kurven som beskrives ved denne parameterfremstilling har netop en vandret tangent, som antages i $P_{\frac{1}{2}}$. Hvilken sammenhæng skal være opfyldt mellem parametrene a, b når denne vandrette tangent findes netop i Origo?

Opgave 3: (40 %)
En omdrejningskatenoideflade K er givet ved parameterfremstillingen

$$[X,Y,Z] = \overrightarrow{OP_{uv}} = [\frac{1}{2}(e^v + e^{-v})\cos u, \frac{1}{2}(e^v + e^{-v})\sin u, v], \ 0 \le u \le 2\pi, |v| \le 1.$$

På Figur 3 nedenfor vises et udsnit af fladen K.



Figur 3: Katenoideflade K

1. Bestem koefficienterne i første og anden fundamentalform for fladen K i punktet P_{uv}.
   Gør rede for at $G(u,v) = E(u,v)$ og at $g(u,v) = -e(u,v)$.

2. Gør rede for, at fladens Gausskrumningen i punktet P_{uv} er givet ved $K(u,v) = \frac{-16}{(e^v+e^{-v})^4}$, mens middelkrumningen $H(u,v) = 0$ i alle punkter (dvs. at K er en såkaldt minimalflade).

3. Bestem hovedkrumningerne $k_1(u,v)$ og $k_2(u,v)$ i P_{uv}. Hvad bliver normalkrumningen $k_n(u,v)$ i en retning som har vinklen $\frac{\pi}{4}$ eller 45^0 med begge hovedretninger?

4. Gør rede for at fladens snit med XY-planen er en cirkel med radius 1 om Origo. Beregn en normalvektor til fladen og en ligning for den affine tangentplan til fladen i punktet P_{u0} : $(\cos u, \sin u, 0)$ på denne cirkel. Ligger fladen på en eller på begge sider af denne tangentplan?