Omprøve i Matematik – Geometriske Grundbegreber

M-sektorens 4. semester

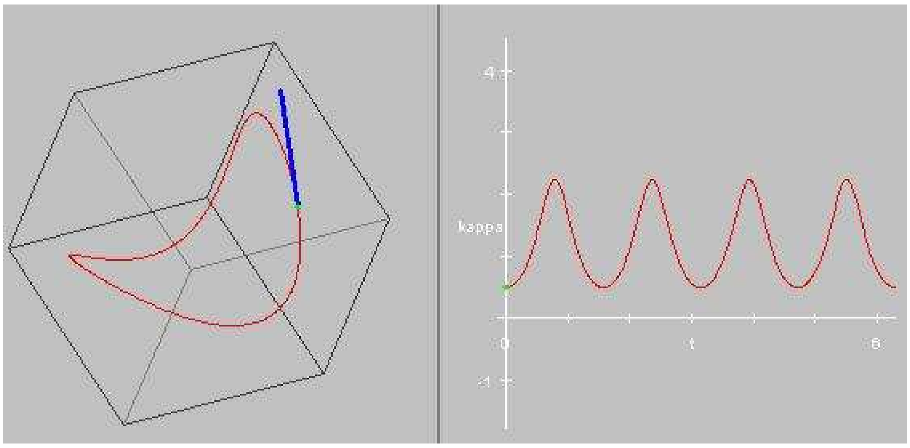
Mandag, den 25. august 2008, kl. 9:00 – 12:00

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages. PC er ikke tilladt.

Opgave 1: (40%)
En lukket rumkurve C er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP}_t = [\cos t, \sin t, \cos t \sin t],\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Se Figur 1 nedenfor.



Figur 1: Kurven C og krumningsfunktion langs med C

Vink: Benyt de trigonometriske formler i fodnoten.[1]

1. Gør rede for at farten i punktet P_t er givet ved $v(t) = \sqrt{1 + \cos(2t)^2}$. Bestem den største og den mindste fart langs kurven; desuden de punkter hvor kurven C gennemløbes med størst og mindst fart.

2. Beregn vektoren $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$ og gør rede for at den har længden $|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{2 + 3\sin(2t)^2}$.

3. Beregn kurvens krumningsfunktion $\kappa(t)$ (se Fig. 1).
   Bestem den største og den mindste krumning på kurven.
   Gør rede for at torsionsfunktionen er givet ved $\tau(t) = -3\frac{\cos(2t)}{2+3\sin(2t)^2}$ og bestem den største og den mindste torsion på kurven.

4. Gør rede for at kurven C er snitkurven for sadelfladen givet ved ligningen $Z = XY$ og cylinderfladen givet ved ligningen $X^2 + Y^2 = 1$.

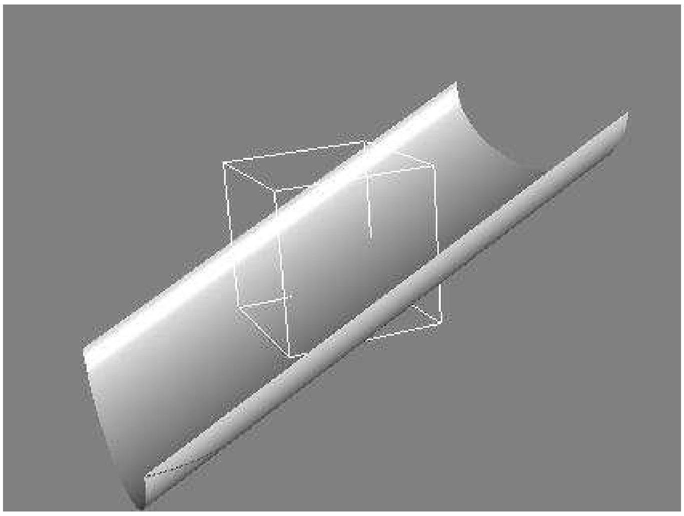
[1] $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t),\ \sin(2t) = 2\sin t \cos t$.

Opgave 2: (24%)
Lad $a, b > 0$ betegne reelle tal. Den naturlige kubiske spline i planen gennem de tre punkter $P_0 : (-a, b), P_1 : (0, 0)$ og $P_2 : (a, b)$ er givet ved to polynomielle parameterfremstillinger $\mathbf{p}_1(t)$ og $\mathbf{p}_2(t),\ 0 \leq t \leq 1$.

1. Beregn hastighedsvektorerne $\mathbf{v}_0$ i P_0, $\mathbf{v}_1$ i P_1 og $\mathbf{v}_2$ i P_2.
2. Gør rede for at parameterfremstillingerne er givet ved
   $\mathbf{p}_1(t) = [a(t-1), \frac{b}{2}(t^3 - 3t + 2)]$ og
   $\mathbf{p}_2(t) = [at, \frac{b}{2}(-t^3 + 2t^2)]$.
3. Gør rede for at splinekurven holder sig inden for 1. og 2. kvadrant.

Opgave 3: (36 %)
En flade K (et rør med elliptisk tværsnit, se Figur 2 nedenfor) er givet ved parameterfremstillingen

$$[X, Y, Z] = \overrightarrow{OP_{uv}} = \mathbf{r}(u, v) = [-2\cos u, 2v, v - \sin u],\ 0 \le u \le \pi, -1 \le v \le 1.$$



Figur 2: Elliptisk rør R

1. Beregn de partielle afledede for parameterfremstillingen $\mathbf{r}$ i punktet P_{uv}. Bestem en ligning for tangentplanen in punktet P_{uv}.
   Konkluder at tangentplanerne i punkter P_{uv} med samme værdi u (men evt. varierende værdier v) er overenssstemmende.

2. Beregn koefficienterne for fladens 1. og 2. fundamentalform.

3. Gør rede for at arealet $A(R)$ for fladen kan beregnes ved
   $A(R) = 4\int_0^{\pi} \sqrt{1 + 4\sin^2 u}\, du$.

4. Gør rede for, at Gausskrumningen $K(u, v) = 0$ i alle punkter på fladen R. Bestem de to hovedkrumninger i et punkt P_{uv} og konkluder, at alle punkter på fladen er parabolske.