Omprøve i Matematik – Geometriske Grundbegreber

M-sektorens 3. semester

Fredag, den 14. februar 1997, kl. 12:30 – 15:30

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages

Opgave 1: (40%) En rumkurve k er i et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_t} = (t, t^2, 2e^t); \; t \in \mathbf{R}.$$

1. Bestem vektorerne $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ og $\mathbf{b}$ fra det medfølgende koordinatsystem i $P_0 : (0, 0, 2)$.

2. Beregn krumningen $\kappa(0)$ og torsionen $\tau(0)$ i punktet P_0.

3. Bestem en parameterfremstilling for tangentlinien l i P_0 og dens snitpunkt med XY-planen. Vis, at vinklen φ mellem l og XY-planen opfylder: $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

4. Vis: $\mathbf{r}'(t)$ og $\mathbf{r}''(t)$ er vinkelrette på hinanden hvis og kun hvis $e^{2t} = -t$. (Dette sker for $t_0 = -0.4263...$). Gør rede for, at hovednormalvektoren $\mathbf{n}(t_0)$ og vektoren $\mathbf{r}''(t_0)$ er lineært afhængige i punktet P_{t_0}.

Opgave 2: (20%) En naturlig kubisk spline i planen skal gå igennem punkterne $P_0 = (-1, 1),\; P_1 = (0, 0)$ og $P_2 = (1, 1)$.

1. Vis, at tangentvektorerne i $P_0,\; P_1$ og P_2 er henholdsvis

$$\overrightarrow{v_0} = (1, -1.5),\; \overrightarrow{v_1} = (1, 0) \text{ og } \overrightarrow{v_2} = (1, 1.5).$$

2. Vis, at kurven **ikke** kan være parablen med toppunkt i P_1 gennem P_0 og P_2.
   (Vink: Det er ikke nødvendigt at beregne parameterfremstillinger for spline-polynomierne.)

3. Beregn de 7 Bézierpunkter, der bestemmer den samme kurve og indtegn de fundne punkter i et koordinatsystem.

Opgave 3: (40%) En flade $\mathcal{F}$ er i et sædvanligt retvinklet højre-koordinatsystem $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ i rummet givet ved parameterfremstillingen

$$\overrightarrow{OP_{uv}} = \mathbf{r}(u,v) = (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, u + v); \quad u \in \mathbf{R}, v > 0.$$

1. Bestem koefficienterne i fladens 1. fundamentalform og vis, at $EG - F^2 = 2v^2$ i punktet P_{uv}.

2. Vis, at fladens normalvektorer er givet ved $\nu(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin u, \cos u, -1)$. Bestem en ligning for fladens tangentplan i punktet $P_{\frac{\pi}{2},1}$.

3. Beregn arealet af den del af fladen, der svarer til

$$1 \leq v \leq 2 \text{ og } 0 \leq u \leq 2\pi.$$

4. Bestem koefficienterne i fladens 2. fundamentalform.

5. Vis, at Gauss-krumningnen $K(P) = 0$ i ethvert punkt P på fladen. Desuden ønskes i hvert punkt $P_{uv} \in \mathcal{F}$ beregnet middelkrumningen $H(u,v)$ samt hovedkrumningerne $\kappa_+(u,v)$ og $\kappa_-(u,v)$.

Husk at skrive navn og gruppenummer på besvarelserne. **Og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelserne.