Omprøve i Matematik – Geometriske Grundbegreber

M-sektorens 3. semester

Fredag, den 12. februar 1999, kl. 12:30 – 15:30

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages.
PC er ikke tilladt.

Opgave 1: (36%) En rumkurve er i et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_t} = [\cos t, \sin t, \sin t], \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

1. Gør rede for, at kurven ligger på cylinderen givet ved ligningen $X^2 + Y^2 = 1$.
2. I punktet P_t ønskes beregnet enhedstangentvektoren $\mathbf{t}$, binormalvektoren $\mathbf{b}$ og hovednormalvektoren $\mathbf{n}$. Bemærk at binormalvektoren $\mathbf{b}$ er konstant!
3. Bestem en ligning for oskulationsplanen ω_t i P_t og bemærk at den ikke afhaenger af t. Bestem den spidse vinkel mellem oskulationsplanen og XY-planen.
4. Gør rede for, at kurven ligger i en plan. Beregn krumning og torsion i punktet P_t.

Opgave 2: (28%) I en orienteret plan er givet de tre punkter $P_0 : [0,0], P_1 : [4,4]$ og $P_2 : [4,0]$. Vi betragter den *naturlige kubiske spline* givet ved disse tre punkter.

1. Vis, at tangentvektorerne i P_0, P_1 og P_2 er henholdsvis

$$\mathbf{v}_0 = [5,6],\ \mathbf{v}_1 = [2,0] \text{ og } \mathbf{v}_2 = [-1,-6].$$

2. Bestem de 7 Bézierpunkter, der bestemmer den samme kurve.
3. Bestem parameterfremstillingen for den del af kurven, der forbinder de første to punkter (P_0 og P_1.)
4. Beregn krumningen κ i punktet P_1.

Opgave 3: (36%) En flade $\mathcal{F}$ er i et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ i rummet givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}[u,v] = \overrightarrow{OP_{uv}} = [u^2, \sqrt{2}\cdot uv, v^2]; \quad u, v > 0.$$

1. Gør rede for, at fladens parameterkurver $\mathbf{r}[u, v_0]$ – for fast v_0 – og $\mathbf{r}[u_0, v]$ – for fast u_0 – er parabler.

2. Gør rede for, at et punkt $P : [x, y, z]$ med positive koordinater x, y, z ligger på fladen $\mathcal{F}$ hvis og kun hvis $y^2 = 2xz$. Benyt dette til at udlede at

$$[x, y, z] \in \mathcal{F} \Rightarrow [tx, ty, tz] \in \mathcal{F} \quad \text{for } t > 0$$

   og at fladen indeholder en halvlinie igennem hvert af dens punkter.

3. Beregn de partielle afledede $\mathbf{r}_u[u, v]$ og $\mathbf{r}_v[u, v]$. Gør rede for, at vektoren $\mathbf{n}[u, v] = [v^2, -\sqrt{2}\cdot uv, u^2]$ er en normalvektor til fladen $\mathcal{F}$ i punktet P_{uv}. Gør rede for, at tangentplanerne i punkterne P_{uv} og $P_{tu,tv}$ (for $t > 0$) er parallele.

4. Gør rede for, at Gausskrumningen $K(u, v) = 0$ i alle punkter $P_{uv} \in \mathcal{F}$.

Husk at skrive navn og gruppenummer på besvarelserne. **Og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelserne.