Prøve i Matematik – Geometriske Grundbegreber

M-sektorens 3. semester

Onsdag, den 12. januar 2000, kl. 9:00 – 12:00

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages.
PC er ikke tilladt.

Opgave 1: (36%) En rumkurve er i et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_t} = [\frac{1}{3}t^3, \sqrt{2}t, \frac{1}{t}], \quad t > 0.$$

1. Beregn $\mathbf{r}'(t)$ og $\mathbf{r}''(t)$. Gør rede for, at $|\mathbf{r}'(t)| = \frac{t^4+1}{t^2}$, og at $|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = 2\sqrt{2}\frac{t^4+1}{t^3}$.
   Bestem endvidere krumningsfunktionen $\kappa(t)$.
2. Beregn længden af kurvestykket fra $P_1 : [\frac{1}{3}, \sqrt{2}, 1]$ til $P_2 : [\frac{8}{3}, 2\sqrt{2}, \frac{1}{2}]$.
3. Beregn for enhver værdi af t enhedstangentvektoren $\mathbf{t}(t)$ og binormalvektoren $\mathbf{b}(t)$ i P_t. Gør rede for, at $\mathbf{t}(t) + \mathbf{b}(t)$ er den *konstante* vektor $\mathbf{u} = [1, 0, -1]$.
4. Bestem ligninger for oskulationplanerne ω_1 i P_1 og ω_2 i P_2 og en parameterfremstilling for deres skæringslinie.

Opgave 2: (24%) En naturlig kubisk spline er givet ved de tre punkter $P_0 : [-4, 0], P_1 : [0, 4]$ samt $P_2 : [4, 0]$.

1. Vis, at parameterfremstillingen for den del af kurven, der forbinder de første to punkter (P_0 og P_1) er givet ved

$$\mathbf{p}(t) = [4t - 4, -2t^3 + 6t].$$

2. Beregn kurvens krumning i punktet P_1.
3. Gør rede for at splinekurven *ikke* er en halvcirkel.

Opgave 3: (40%) En flade S er i et sædvanligt retvinklet højre-koordinatsystem i rummet givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}[u,v] = \overrightarrow{OP_{uv}} = [u+v, u^2+2vu, u^3+3vu^2], \quad u \in \mathbf{R},\ v > 0.$$

1. Bestem vektorfunktioner $\mathbf{a}(u)$ og $\mathbf{b}(u)$ således at $\mathbf{r}[u,v] = \mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u)$. Benyt denne fremstilling til at vise, at S kan beskrives som mængden af halvtangenter til en rumkurve.

2. Beregn normalvektoren $\mathbf{N}(u,v) = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)(u,v)$, og vis at dens længde er givet ved $|\mathbf{N}(u,v)| = 2v\sqrt{9u^4+9u^2+1}$.

3. Bestem en ligning for tangentplanen gennem et punkt P_{1v}, dvs. for et punkt med parameterværdien $u = 1$. Vis, at man får den *samme* tangentplan i alle punkter P_{1v}.

4. Beregn koefficienten G i fladens 1. fundamentalform samt koefficienterne e, f, g i fladen 2. fundamentalform.

5. Vis, at Gausskrumningen K og middelkrumningen H i alle fladens punkter opfylder:

   $$K = 0, \quad H < 0.$$

   Benyt dette til at bestemme fortegnene for hovedkrumningerne k_1 og k_2.

Husk at skrive navn og gruppenummer på besvarelserne. **Og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelserne.