Repetition og Perspektivering

kl. 8:15 – 8:45 i Fib 16, lokale 1.108
Normalvektorer og ligninger. Snit mellem linier og planer. Ortogonalprojektioner. Beregning af afstand og vinkler.

Opgaveregning:

kl. 8:50-10:35 i grupperummene.

Opgaver:

1. Opvarmning: Lad $\mathbf{x} = [2,4,6]$, $\mathbf{y} = [2,2,1]$. Bestem projektionen $\mathbf{p}$ af $\mathbf{x}$ på $\mathbf{y}$. Verificer, at $\mathbf{q} = \mathbf{x} - \mathbf{p}$ står vinkelret på $\mathbf{y}$.

   [Facit: $\mathbf{p} = [4,4,2], \mathbf{q} = [-2,0,4]$.]

2. Givet to vektorer $\mathbf{e}, \mathbf{n} \in \mathbf{R}^3$, sæledes at $|\mathbf{e}| = 1$. Bestem $\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{n})$.
   (Vink: I modsætning til opg. 5 fra 1. lektion behøver de to vektorer ikke at stå vinkelret på hinanden. Man kan med fordel udnytte ortogonaldekompositionen
   $\mathbf{n} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, hvor $\mathbf{e} \| \mathbf{p}$ og $\mathbf{e} \perp \mathbf{q}$.)

3. I rummet $\mathbf{E}^3$ er der givet en linie l og en plan α med parameterfremstillinger

$$\begin{aligned} l : \overrightarrow{OP_t} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \alpha : \overrightarrow{OQ_{rs}} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

   Find en parameterfremstilling for ls ortogonalprojektion l_α på α (den linie man får ved at projicere alle punkter fra l på α).
   [Facit: f.eks. $[1.5, 0, 1.5] + t[4, 1, -2]$.]

4. Givet fire punkter $P[1,1,1]$, $Q[4,5,3]$, $R[-1,-10,-1]$ og $S[8,2,2]$ i rummet. Linien l går igennem P og Q og linien m går igennem R og S. Bestem afstanden mellem l og m. [Facit:5.]

5. Givet punktet $R[1,1,1]$ og to parallele linier l og m i rummet med parameterfremstillingerne

$$l : \overrightarrow{OP} = [2,1,4] + t[1,-1,-2];$$

$$m : \overrightarrow{OQ} = [1,0,2] + t[2,-2,-4].$$

   Disse to linier er parallele(!) og ligger dermed i en plan α. Find afstanden mellem linierne l og m, en ligning for planen α, koordinaterne til Rs projektion på α samt Rs afstand fra α.
   [Facit: $\frac{\sqrt{30}}{3}$; $z - 2y = 2$; $[1, -0.2, 1.6]$; $\frac{3}{5}\sqrt{5}$.]

6. Det er på tide at I får afprøvet nogle af de interaktive web-sider med værktøjet VIDIGEO. Gå med et klik til GEOLAB-siden

   (a) Gå til illustrationen *Parametrization of a plane curve* og få systemet til at tegne kurven med parameterfremstillingen $\mathbf{r}(t) = [\cos(t) + \sin(2t), -\sin(3t) + \cos(4t)], t \in [0, 2\pi]$. (Man skriver først x-koordinaten i feltet $x(t)$, Return! y-koordinaten i feltet $y(t)$. Return! Så klikker man på feltet $t0 =$ og indsætter værdierne 0 efter *From* Return! og 6.28 efter *To*. Return!)

   (b) Det ser ud til at kurven har to spidstangenter. Er det rigtigt? Prøv først i illustrationen *Moving velocity vector and speed*. Bliver hastigheden 0 i de to punkter? Sidst kan man prøve *Tangents by zooming* i nærheden af disse to punkter. Man zoomer ved at "dragge" en rektangel med musen i nærheden af det punkt man ønsker undersøgt. Konklusion?

Forelæsning:

kl. 10:40 – 12:00 i Fib 16, lokale 1.108.

Mål og indhold:

Vi begynder på forelæsningens andet hovedemne: beskrivelse af kurver i plan og rum. Dette gøres hovedsagelig vha. parameterfremstillinger, som er vektorfunktioner af en reel variabel. Målet er, at beskrive og beregne geometriske størrelser, som f.eks. krumning, vha. disse vektorfunktioner og deres afledede. Som første skridt ser vi på bestemmelse af tangentretninger ud fra en given parameterfremstilling vha. differentiation af vektorfunktionen; og dette også i det tilfælde hvor kurven har en spidstangent. Herefter ser vi på størrelsen fart, dens beregning og anvendelse til at definere og beregne kurvelængde: vha. integration af fartfunktionen. En del af stoffet er allerede kendt fra basisåret.

Litteratur:

MR II.1 – II.2, pp. 47 – 61.

Supplerende: Edwards & Penney, sect. 12.5, pp. 803 – 813.

Næste gang:

4. lektion. 28.2.08. Krumning for kurver i plan og rum. [MR], II.3, pp. 62 – 76. Supplerende: Edwards & Penney, ch. 12.6, pp. 817 – 825.

Fredrik Bajersvej 7G | 9940 8855 | raussen@math.aau.dk
9220 Aalborg Øst | - | http://www.math.aau.dk/~raussen