Repetition og Perspektivering:

kl. 8:15 – 8:45 i Fib 16, lokale 1.108. Vektorfunktioner og parameterfremstillinger for kurver. Sekanter og tangenter. Buelængde.

Opgaveregning:

kl. 8:50-10:35 i grupperummene.

Opgaver:

1. Opvarmning: En rumkurve er givet ved parameterfremstilloingen

$$\mathbf{r}(t) = [3\cos t, 3\sin t, -4t].$$

Bestem kurvens hastighedsvektor $\mathbf{r}'(t)$, fart $v(t) = |\mathbf{r}'(t)|$, enhedstangentvektor $\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$ og accelerationsvektor $\mathbf{r}''(t)$ til tidspunktet t. Hvilken slags kurve er der tale om?

2. Et punkt (en partikel) P_t bevæger sig på en kugleflade. Vis, at hastighedsvektoren af den herved beskrevne kurve er tangent til denne kugleflade i hvert punkt.
(Vink: Lad C betegne kuglefladens centrum og lad $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{CP_t}$. Vis, at funktionen $f(t) = \mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t)$ er konstant. Ved differentiation fås altså $0 = f'(t) = \ldots$? Beregn $f'(t)$ og interpreter resultatet.)

3. For dem, der ikke nåede opgaven sidste gang:
Gå med et klik til GEOLAB-siden

   (a) Gå til illustrationen Parametrization of a plane curve og få systemet til at tegne kurven med parameterfremstillingen $\mathbf{r}(t) = [\cos(t) + \sin(2t), -\sin(3t) + \cos(4t)], t \in [0, 2\pi]$. (Man skriver først x-koordinaten i feltet $x(t)$, `Return!` y-koordinaten i feltet $y(t)$. `Return!` Så klikker man på feltet $t0 =$ og indsætter værdierne 0 efter *From* `Return!` og 6.28 efter *To*. `Return!`)

   (b) Det ser ud til at kurven har to spidstangenter. Er det rigtigt? Prøv først i illustrationen Moving velocity vector and speed. Bliver hastigheden 0 i de to punkter? Sidst kan man prøve Tangents by zooming i nærheden af disse to punkter. Man zoomer ved at "dragge" en rektangel med musen i nærheden af det punkt man ønsker undersøgt. Konklusion?

4. En plan kurve er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_t} = [t^3, \frac{3}{2}t^2], \quad t \in \mathbf{R}.$$

   (a) Vis, at kurven har en (ægte) tangent i alle punkter på nær ét og bestem det punkt i hvilket kurven kun har en spidstangent. Skitser kurven (brug det geometriske laboratorium!).

   (b) Beregn hastighedsvektoren $\mathbf{r}'(t)$ og vis at farten i P_t er

$$v(t) = |\mathbf{r}'(t)| = 3|t|\sqrt{t^2+1}.$$

   (c) Beregn længden af kurvestykket fra $P_{-1} : [-1, \frac{3}{2}]$ til $P_1 : [1, \frac{3}{2}]$.

[Facit: $4\sqrt{2} - 2 \sim 3.66$.]

FREDRIK BAJERSVEJ 7G 9220 AALBORG ØST
9940 8855
RAUSSEN@MATH.AAU.DK - HTTP://WWW.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN

5. En plan kurve er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = [t^3 + t^4, 2t^3], \quad t \in \mathbf{R}.$$

Vis, at kurven har en tangent i ethvert af sine punkter (også i O, og selvom $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{0}$!) Igen: skitser kurven!

Forelæsning:

kl. 10:40 – 12:00 i Fib 16, lokale 1.108.

Mål og indhold:

Med udgangspunkt i en analytisk beskrivelse af en kurve skal vi undersøge dennes geometriske egenskaber. Centralt er kurvens krumning i et givet punkt og den approksimerende krumningscirkel, som skal defineres og beregnes (vha. 1. og 2.afledede af parameterfremstillingen). Beregningen tager udgangspunkt i en opløsning af accelerations(kraft-)vektorens tangentiale og normale komponenter. I mekaniske anvendelser skal den normale komponent holdes inden for visse grænser.
En plan kurve kan rekonstrueres udelukkende med kendskab til dens (kontiunerte) krumningsfunktion (på nær en flytning). Det giver anledning til at bestemme kurver med pæne egenskaber (f.eks. klotoider – cf. Fig. 22, s. 78 i noterne – som man kender fra motorvejsindfletninger).

Andre anvendelser af krumningsbegrebet findes i mekanik og bjælketeorien: Hvis en tværkraft belaster en bjælke, er snitmomentet proportionalt med krumningen af kurven, som den bøjede bjælke beskriver.

Litteratur:

MR Ch. II.3, pp. 62 – 78.

supplerende: Edwards & Penney, ch. 12.6, pp. 817 – 826.

Næste gang:

5. lektion. Torsdag, den 6.3.08 i lokale 1.101. Rumkurver. [MR] ch. II.4, pp. 78 – 94. Afsnit II.4.4. gennemgås ikke under forelæsningen.

Med venlig hilsen

Martin Raussen

Fredrik Bajersvej 7G | 9940 8855 | raussen@math.aau.dk
9220 Aalborg Øst | http://www.math.aau.dk/~raussen