Repetition og Perspektivering:

kl. 8:15 – 8:45 i Fib 16, lokale 1.108.
Parameterfremstillinger for flader, tangentplan og normalvektor. Den *1. fundamentalform* for fladen giver os mulighed for beregning af længder, vinkler og arealer på en flade vha. krumme koordinater.

Litteratur:

[MR] Ch. III.1 – III.2, pp. 95 – 118.

Opgaveregning:

kl. 8:50-10:35 i grupperummene.

Opgaver:

1. En flade S er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u,v) = [u, u+v^2, v+1], \ (u,v) \in \mathbf{R}^2.$$

   (a) Bestem en normalvektor og en ligning for tangentplanen til S i punktet $P : [0,0,1]$ svarende til $u = v = 0$. ($[1,-1,0]; y = x$)

   (b) Beregn i ethvert punkt på S størrelserne E, F, G fra den 1. fundamentalform.
   ($E = 2, F = 2v, G = 4v^2 + 1$)

   (c) Vis, at længden af kurven γ på S med parameterfremstillingen

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(t,t), \ t \in [-1,1]$$

   er givet ved $L(\gamma) = \int_{-1}^{1} \sqrt{4t^2+4t+3}\,dt \simeq 4$ – med og uden brug af den 1. fundamentalform.

   (d) Beregn arealet (ved et dobbelt integale) for bæltet $\mathbf{r}(Q)$ på fladen, hvor $Q := \{[u,v] \in \mathbf{R}^2 | \ -1 \le u,v \le 1\}$ er kvadratet med sidelængde 2 og centrum i origo i parameterplanen.
   (Vink til evt. udregning af dobbeltintegrale : $\int \sqrt{v^2+a^2}dv = \frac{v}{2}\sqrt{v^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log|v + \sqrt{v^2+a^2}|$; Facit: $2\sqrt{6} - 2\log(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \simeq 7.19$.)

   (e) Find en ligning, som koordinaterne for punkter på S opfylder og udled en beskrivelse af S. Udtegn fladen i det geometriske laboratorium – eller evt. i MAPLE med kommandoen `plot3d`.
   (Vink: Prøv at udtrykke Y-koordinaten i parameterfremstillingen $\mathbf{r}$ som en funktion af X- og Z-koordinaterne.
   Fladen kaldes en “parabolsk cylinder”. Hvorfor?)

2. Bestem en parameterfremstilling for Bézierkurven, som har de fire punkter $P_0 : [0,0], P_1 : [3,0], P_2 : [6,0], P_3 : [6,3]$ som kontrolpunkter. Tegn kurven og sammenlign med den kubiske spline gennem de samme punkter fra 8. lektionsseddel, opg. 2.
   (Facit: $[-3t^3 + 9t, 3t^3]$)

3. (Omprøve 14.2.97, opg. 2.) En naturlig kubisk spline i planen skal gå igennem punkterne $P_0 : (-1,1)$, $P_1 : (0,0)$ og $P_2 : (1,1)$.

   (a) Vis, at tangentvektorerne i P_0, P_1 og P_2 er henholdsvis
   $\mathbf{v}_0 = [1,-1.5]$, $\mathbf{v}_1 = [1,0]$ og $\mathbf{v}_2 = [1, 1.5]$.

   (b) Vis, at kurven ikke kan være parablen med toppunkt i P_1 gennem P_0 og P_2.
   (Vink: Det er ikke nødvendigt

at beregne parameterfremstillinger for spline-polynomierne.)

(c) Beregn de 7 Bézierpunkter, der bestemmer den samme kurve og indtegn de fundne punkter i et koordinatsystem.
($Q_0 = P_0$, $Q_1 : (-\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$,
$Q_2 : (-\frac{1}{3}, 0)$, $Q_3 = P_1$,
$Q_4 : (\frac{1}{3}, 0)$, $Q_5 : (\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$, $Q_6 = P_2$.)

Forelæsning:

kl. 10:40 – 12:00 i Fib 16, lokale 1.108.

Mål og indhold:

Hvordan måles krumning(er) på en flade i et givet punkt? Man kan skære fladen med alle normalplaner gennem punktet; det giver (uendelig) mange rumkurver, som kaldes normalsnit. Deres krumninger giver information om krumningen af fladen i punktet. Det viser sig, at de fordeler sig efter et pænt mønster: I én *hovedretning* er normalsnittets krumning størst – den første hovedkrumning; i retningen vinkelret derpå (den anden hovedretning) er den mindst – den anden hovedkrumning; og indimellem varierer normalkrumningerne efter Eulers ligning. Hovedkrumningerne beregnes vha. Gaussisk krumning og *middelkrumning*; beregning af disse tager udgangspunkt i sammenhængene mellem krumning, normalkrumning, geodætisk krumning og fladens 2. fundamentalform.

Litteratur:

[MR], ch. III.3 – III.5.1, pp. 118 – 136. Afsnit III.3.2 (pp. 120 – 123) gennemgås ikke, men det motiverer det videre forløb i et specielt tilfælde.

Software:

- Fladedelen af det geometriske laboratorium
- MAPLE-arbejdsark om både splines og om fladeteori

Næste – og sidste – gang:

10. lektion. Tirsdag, den 15.4.07.
[MR], pp. 137 – 156.
Mere om krumningsbegreber. Elliptiske, hyperbolske og parabolske punkter. Omdrejningsflader, retlinede flader.

Med venlig hilsen

Martin Raussen