Geometriske grundbegreber
1. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

7.2.08

Prædiken

- Præsentation
- Mål med forelæsningen
  – konkret – abstrakt
  – forhold til semester og studium
- Midler
  Forelæsning, opgaver, selvlæsning
  Kursusplan, hjemmeside
  Litteratur
  Eksamen
- Hvordan ser en kursusgang ud?
- Forudsætninger og forventninger
- "Ingeniørmatematik"
- Software: MAPLE, VIDIGEO

Materialer

- Hjemmeside
  http://www.math.aau.dk/~raussen/I4/08
  Her findes efterhånden noter og lektionsplaner (pdf).
- Kursusplan
  Plan- og rumgeometri
  Noter MR, ch. 1 — 2MM
  Kurver i plan og rum
  Noter MR, ch. 2 — 3.5MM
  Kurverepræsentation i grafisk software
  Noter JR, ch. 4 — 1.5MM
  Flader i rummet
  Noter MR, ch. 3 — 3MM
- Supplerende litteratur
  Matematikbøger fra basisuddannelsen
  evt. MAPLE manual

Software

- MAPLE
  sti `//msektornt2/SOFTWARE/Mathematics`
  herunder mappen med MAPLE
- VIDIGEO

`http://www.math.aau.dk/~raussen/VIDIGEO/GEOLAB`

  Java2 påkrævet!

1. lektion – A

- $\mathbf{R}^2$ og $\mathbf{R}^3$ som vektorrum
  addition, multiplikation med reelle tal
- lineært (u-)afhængige vektorer
  parallele, koplanare vektorer
- $$\begin{array}{ccc} \text{punktrum} & \leftrightarrow & \text{vektorrum} \\ \mathbf{E}^2 \text{ og } \mathbf{E}^3 & \leftrightarrow & \mathbf{R}^2 \text{ og } \mathbf{R}^3 \end{array}$$
- Parameterfremstilling for linie og plan
- Linie gennem to punkter
- Plan gennem tre punkter

Linearkombinationer, lineær (u)afhænighed

Givet vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ i plan eller rum.
En vektor $\mathbf{u} = a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, a, b \in \mathbf{R}$ kaldes linearkombination af $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$.
En vektor $\mathbf{v} = a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + c\mathbf{z}, a, b, c \in \mathbf{R}$ kaldes linearkombination af $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ og $\mathbf{z}$.
Mængden $sp(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, hhv. $sp(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ af alle linearkombinationer kaldes vektorenes spænd. Geometrisk betydning?

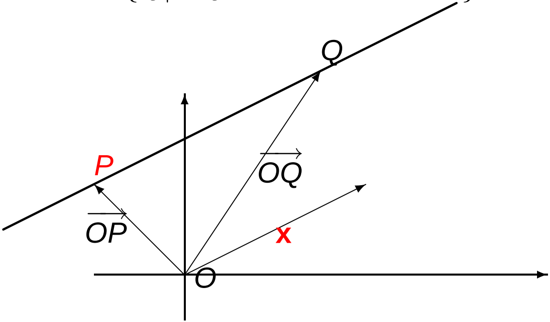
Vektorerne $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ kaldes lineært afhængige hvis der findes en linearkombination $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = \mathbf{0}$ uden at $a = b = 0$.
Vektorerne $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ og $\mathbf{z}$ kaldes lineært afhængige hvis der findes en linearkombination $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + c\mathbf{z} = \mathbf{0}$ uden at $a = b = c = 0$.
Ellers kaldes $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, hhv. $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ lineært uafhængige.
I så fald udspænder de en plan, hhv. rummet.

Parameterfremstillinger 1

Ret linie

- Givet punkt P (stedvektor $\overrightarrow{OP}$) og retningsvektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$l = \{Q \,|\, \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + t\mathbf{x},\ t \in \mathbf{R}\}$$



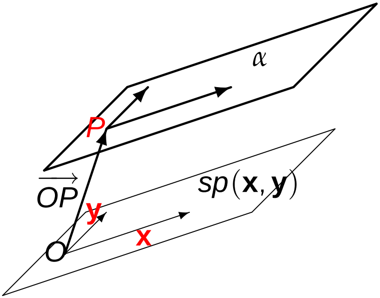
- Parameterfremstilling er ikke entydigt bestemt!

Parameterfremstillinger 2

Plan i rummet

- Givet punkt P (stedvektor $\overrightarrow{OP}$) og to lineært uafhængige retningsvektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$.

$$\alpha = \{Q \in \mathbf{E}^3 |\ \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + s\mathbf{x} + t\mathbf{y},\ s, t \in \mathbf{R}\}$$



- Parameterfremstilling er ikke entydigt bestemt!

Eksempel

Plan gennem tre punkter i rummet

Planen α gennem $P_1 : [1,1,1], P_2 : [2,2,1], P_3 : [3,2,2]$ har parameterfremstilling

$$\alpha : \overrightarrow{OP_1} + s\overrightarrow{P_1P_2} + t\overrightarrow{P_1P_3} = [1,1,1] + s[1,1,0] + t[2,1,1], s,t \in \mathbf{R}.$$

Ligger $P : [0,1,2]$ i α?

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + s\overrightarrow{P_1P_2} + t\overrightarrow{P_1P_3} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P} = s\overrightarrow{P_1P_2} + t\overrightarrow{P_1P_3} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$ Rækkereduktion:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Svar: Nej!

1. lektion – B

- Prikprodukt: længde og vinkel
- i planen: hatvektor, planprodukt
- i rummet: krydsprodukt, rumprodukt
- Formelsamling: MR, p. 12/13

Produkter

Prikprodukt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = [x_1, x_2, x_3] \cdot [y_1, y_2, y_3] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \in \mathbf{R}$

Planprodukt – i $\mathbf{R}^2$ $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \in \mathbf{R}$

Krydsprodukt – i $\mathbf{R}^3$

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = [x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

Rumprodukt – i $\mathbf{R}^3$

$$[\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = z_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) + z_2(x_3 y_1 - x_1 y_3) + z_3(x_1 y_2 - x_2 y_1) \in \mathbf{R}$$

Formelsamling

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$;
- $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})$;
- $a\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$;
- $[\mathbf{y}, \mathbf{x}] = -[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$;
- $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = -\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{y}}$;
- $\mathbf{y} \times \mathbf{x} = -(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$;
- $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) + (\mathbf{x} \times \mathbf{z})$;
- $a\mathbf{x} \times \mathbf{y} = a(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$;
- Generelt: $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) \neq (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z}$;
- $[\mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{z}] = [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] + [\mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{z}]$;
- $[a\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] = a[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$.
- $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] = -[\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}] = -[\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}]$.