Geometriske grundbegreber
3. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

21.2.08

3. lektion – A: Intro til kurver

- Vektorfunktioner af en variabel:
  En “variabel vektor” beskriver kurven.
- Koordinatfunktioner
- Kontinuitet. Differentiabilitet.
- Sekanter
- Halvtangenter og tangenter
- Parameterfremstilling for tangentlinien

Regneregler for differentiation

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 : [a, b] \to \mathbf{R}^i$, $i = 2$ eller $i = 3$, differentiable vektorfunktioner,
$f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $s : [c, d] \to [a, b]$ differentiable funktioner:

- $(\mathbf{r}_1 \pm \mathbf{r}_2)'(t) = \mathbf{r}_1'(t) \pm \mathbf{r}_2'(t)$;
- $(f\mathbf{r}_1)'(t) = f'(t)\mathbf{r}_1(t) + f(t)\mathbf{r}_1'(t)$;
- $(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)'(t) = \mathbf{r}_1'(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2'(t)$;
- $(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)'(t) = \mathbf{r}_1'(t) \times \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2'(t)$;
- Kædereglen: $(\mathbf{r}_1 \circ s)'(t) = s'(t)\mathbf{r}_1'(s(t))$, $t \in (c, d)$.

Parameterfremstillinger for kurver

En glat (C^∞) vektorfunktion $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ eller $\mathbf{R}^3$ er en parameterfremstilling for kurven

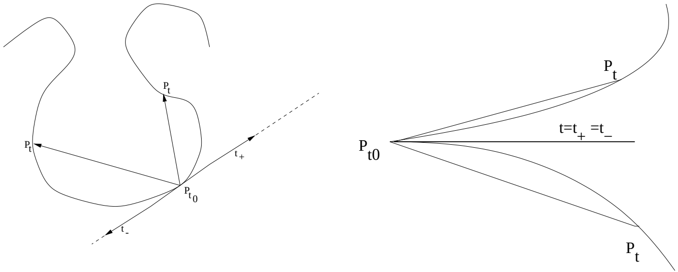
$$C = \{P_t \in \mathbf{E}^2 \text{ eller } \mathbf{E}^3 | \overrightarrow{OP_t} = \mathbf{r}(t), t \in [a, b]\}.$$

Parameterfremstillingen er regulær hvis $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ for alle $t \in (a, b)$.

Eksempler:

- $\mathbf{r}(t) = [r\cos(t), r\sin(t)],\ t \in [0, 2\pi] \leftrightarrow$ cirkel med radius r;
- $\mathbf{r}(t) = [a\cos(t), a\sin(t), bt] \leftrightarrow$ skruelinie (helix);
- $\mathbf{r}(t) = [t, f(t)] \leftrightarrow$ graf for funktionen $y = f(x)$.

Sekanter, halvtangenter, tangenter, spidstangenter



$$\mathbf{t}_{+} = \lim_{t\to t_0+} \frac{\overrightarrow{P_{t_0}P_t}}{|\overrightarrow{P_{t_0}P_t}|} \qquad \mathbf{t}_{-} = \lim_{t\to t_0-} \frac{\overrightarrow{P_{t_0}P_t}}{|\overrightarrow{P_{t_0}P_t}|}$$

Tangenter ved regulære parameterfremstillinger

En parameterfremstilling $\mathbf{r} : I \to \mathbf{R}^n$ for en kurve kaldes regulær, hvis

$$\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0} \text{ for alle } t \in I.$$

(Enheds)Halvtangenterne $\mathbf{t}_+$ og $\mathbf{t}_-$ i P_{t_0} med $\overrightarrow{OP_{t_0}} = \mathbf{r}(t_0)$ beregnes i så fald ved:

$$\mathbf{t}_+(t_0) = -\mathbf{t}_-(t_0) = \frac{\mathbf{r}'(t_0)}{|\mathbf{r}'(t_0)|}.$$

Hvorfor?

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)}{t-t_0} & = & \frac{|\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)|}{t-t_0} & \cdot & \frac{\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)}{|\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)|} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle t\to t_0+} & & \Big\downarrow{\scriptstyle t\to t_0+} & & \Big\downarrow{\scriptstyle t\to t_0+} \\
\mathbf{r}'(t_0) & = & v(t_0) & \cdot & \mathbf{t}_+(t_0) \\
\mathbf{r}'(t_0) & = & -v(t_0) & \cdot & \mathbf{t}_-(t_0) \text{ for}
\end{array}$$

$t \to t_0-$.

3. lektion – B: Fart og buelængde

- Hastighedsvektor, enhedstangentvektor, fart
- Buelængde = længde af kurvestykke
- Den naturlige parameterfremstilling
- “Hovedfidusen”
- Det medfølgende koordinatsystem for en plan/rumlig kurve

Hastighed, fart, tangent, acceleration

For en kurve med regulær parameterfremstilling
$\mathbf{r}: I \to \mathbf{R}^n,\ n = 2, 3$, gælder i punktet P med $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}(t_0)$:

- Hastighedsvektor: $\mathbf{r}'(t_0)$;
- Fart: $v(t_0) = |\mathbf{r}'(t_0)|$;
- Tangentvektor: $\mathbf{t}(t_0) = \frac{\mathbf{r}'(t_0)}{|\mathbf{r}'(t_0)|}$;
- Accelerationsvektor: $\mathbf{r}''(t_0)$.

Buelængde

ved konstant fart: længde = fart * tid
ved variabel fart: længde = integral af farten over tiden.
For en kurve med parameterfremstilling $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$
er længden af kurvestykket mellem $\mathbf{r}(a)$ og $\mathbf{r}(b)$ derfor:

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b v(t)\,dt \\ &= \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt \\ &= \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt \end{aligned}$$

Den er som regel større end afstanden mellem $\mathbf{r}(a)$ og $\mathbf{r}(b)$.

Buelængdefunktion og -parameter

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|\, du = \int_a^t v(u)\, du$$

Buelængde fra tidspunkt a til tidspunkt t.
$s(t)$ er en monotont voksende funktion med
$0 \leq s'(t) = |\mathbf{r}'(t)| = v(t)$ $\leftarrow$farten

$\mathbf{r}_{al}(s)$: buelængde s som parameter
peger på punkt på kurven i afstand s langs med kurven fra begyndelsespunktet.
Fart for denne parameterfremstilling = 1: $|\mathbf{r}'_{al}(s)| = 1$.
$\mathbf{r}'_{al}(s) = \mathbf{t}(s) \leftarrow$ enhedstangentvektor

"Hovedfidus" og medfølgende koordinatsystem

for en kurve med parameterfremstilling $\mathbf{r}(s)$
(s = buelængdeparameter) og enhedstangentvektor $\mathbf{t}(s)$:

$$1 = |\mathbf{t}(s)|^2 = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) \Rightarrow$$

differentier mht. s $\quad 0 = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}'(s) \Rightarrow \mathbf{t}(s) \perp \mathbf{t}'(s).$

Hovednormalvektor $\mathbf{n}(s)$ =

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{t}}(s) & \text{for plan kurve} \\ \frac{\mathbf{t}'(s)}{|\mathbf{t}'(s)|} & \text{for rumkurve med } |\mathbf{t}'(s)| \neq 0 \end{cases}$$

Krumningsvektor $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$. $\quad \kappa(s)$ = krumning
Det medfølgende koordinatsystem i planen: $[\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)]$
Det medfølgende koordinatsystem i rummet:
$[\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)]$
OBS: buelængdeparameter s påkrævet!