Geometriske grundbegreber
6. lektion

Martin Raussen

Institut for matematiske fag
Aalborg Universitet

18.3.2008

6A – Rumkurver

- Torsion: definition og beregning
- Frenets formler
- Krumningsfunktion og torsionsfunktion fastlægger en rumkurve

Formler for rumkurver 1

Parameterfremstilling $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$.
I punktet P_0 med $\overrightarrow{OP_0} = \mathbf{r}(t_0)$ gælder:

1. $$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'(t_0)}{|\mathbf{r}'(t_0)|} \leftarrow \text{ enhedstangent}$$
2. $$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)}{|\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)|} \leftarrow \text{ binormal}$$
3. $$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} \leftarrow \text{ hovednormal}$$

t og **n** udspænder oskulationsplan ω_{P_0}.

Formler for (rum)kurver 2

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)|}{|\mathbf{r}'(t_0)|^3} \leftarrow \text{ krumning for rumkurve}$$

$$\kappa = \frac{[\mathbf{r}'(t_0), \mathbf{r}''(t_0)]}{|\mathbf{r}'(t_0)|^3} \leftarrow \text{ krumning for plan kurve}$$

$$\tau = \frac{\mathbf{r}'''(t_0) \cdot (\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0))}{|\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)|^2} \leftarrow \text{ torsion for rumkurve}$$

Krumning og torsion bestemmer rumkurve

på nær en flytning

Givet en differentiabel funktion $k : [a, b] \to \mathbf{R}_{>0}$ og en differentiabel funktion $t : [a, b] \to \mathbf{R}$. Så findes der netop én kurve (med buelængdeparameterfremstilling $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^3$), således at

- Kurvens krumningsfunktion er $\kappa(s) = k(s)$
- Kurvens torsionsfunktion er $\tau(s) = t(s)$
- begyndelsespunkt $\mathbf{r}(a) = \overrightarrow{OP}$ og -hastighed $\mathbf{r}'(a) = \mathbf{v}$ er fastlagt.

Eksempel: En kurve med konstant krumning og konstant torsion er en skruelinie.

6B – Kurver i CAGD

- Støttepunkter og håndtag (magneter)
- En gymnasieopgave om 3.grads-polynomier
- Fergusonkurver (= kubiske parameterfremstillinger)
- Bézierkurver
- Sammenhæng mellem kubiske Bézierkurver og Fergusonkurver

Opgave: Find 3.grads polynomium

$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ sål. at

$$
\begin{aligned}
y_b = p(0) = &\ a_0 \\
y_s = p(1) = &\ a_0 + \quad a_1 + a_2 + a_3 \\
h_b = p'(0) = &\ \qquad\quad a_1 \\
h_s = p'(1) = &\ \qquad\quad a_1 + 2a_2 + 3a_3
\end{aligned}
$$

fører til et lineært ligningssystem med løsning:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= p(0) \\
a_1 &= p'(0) \\
a_2 &= -3p(0) + 3p(1) - 2p'(0) - p'(1) \\
a_3 &= 2p(0) - 2p(1) + p'(0) + p'(1)
\end{aligned}
$$

Kubisk kurve

Dermed bestemmes polynomiet $p(t)$ ved indsætning af a_0, a_1, a_2, a_3:

$$\begin{aligned} p(t) &= p(0) + p'(0)t + (-3p(0) + 3p(1) - 2p'(0) - p'(1))t^2 \\ &\quad + (2p(0) + 2p(1) + p'(0) + p'(1))t^3 \\ &= {}^1(1 - 3t^2 + 2t^3)p(0) + (3t^2 - 2t^3)p(1) \\ &\quad + (t - 2t^2 + t^3)p'(0) + (-t^2 + t^3)p'(1) \\ &= F_1(t)p(0) + F_2(t)p(1) + F_3(t)p'(0) + F_4(t)p'(1) \end{aligned}$$

Fergusonpolynomier:

$$F_1(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3 \quad F_2(t) = 3t^2 - 2t^3$$
$$F_3(t) = t - 2t^2 + t^3 \quad F_4(t) = -t^2 + t^3$$

De samme polynomier for hver opgave!

Det der ændrer sig (variable) er værdierne $p(0), p(1), p'(0), p'(1)$.

[1] Sortering!

Opgave: Find 3.grads parameterfremstilling

med vektorfunktion $\mathbf{p}(t)$, vektorer $\mathbf{a}_i$

$\mathbf{p}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3$ sål. at

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_b &= \mathbf{p}(0) = \mathbf{a}_0 \\
\mathbf{P}_s &= \mathbf{p}(1) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \\
\mathbf{h}_b &= \mathbf{p}'(0) = \mathbf{a}_1 \\
\mathbf{h}_s &= \mathbf{p}'(1) = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3
\end{aligned}
$$

fører til et lineært ligningssystem med løsning:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_0 &= \mathbf{p}(0) \\
\mathbf{a}_1 &= \mathbf{p}'(0) \\
\mathbf{a}_2 &= -3\mathbf{p}(0) + 3\mathbf{p}(1) - 2\mathbf{p}'(0) - \mathbf{p}'(1) \\
\mathbf{a}_3 &= 2\mathbf{p}(0) - 2\mathbf{p}(1) + \mathbf{p}'(0) + \mathbf{p}'(1)
\end{aligned}
$$

Kubisk parameterfremstilling

Dermed bestemmes den kubiske parameterfremstilling $\mathbf{p}(t)$ ved ved indsætning af $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}(0) + \mathbf{p}'(0)t + (-3\mathbf{p}(0) + 3\mathbf{p}(1) - 2\mathbf{p}'(0) - \mathbf{p}'(1))t^2 \\
&+ (2\mathbf{p}(0) + 2\mathbf{p}(1) + \mathbf{p}'(0) + \mathbf{p}'(1))t^3 \\
&= (1 - 3t^2 + 2t^3)\mathbf{p}(0) + (3t^2 - 2t^3)\mathbf{p}(1) \\
&+ (t - 2t^2 + t^3)\mathbf{p}'(0) + (-t^2 + t^3)\mathbf{p}'(1) \\
&= F_1(t)\mathbf{p}(0) + F_2(t)\mathbf{p}(1) + F_3(t)\mathbf{p}'(0) + F_4(t)\mathbf{p}'(1)
\end{aligned}$$

Fergusonpolynomier:

$$\begin{aligned}
F_1(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3 & F_2(t) &= 3t^2 - 2t^3 \\
F_3(t) &= t - 2t^2 + t^3 & F_4(t) &= -t^2 + t^3
\end{aligned}$$

De samme polynomier for hver opgave!

Det der ændrer sig (variable) er: $\mathbf{p}(0), \mathbf{p}(1), \mathbf{p}'(0), \mathbf{p}'(1)$.

Fergusonkurver

Kubiske parameterfremstillinger

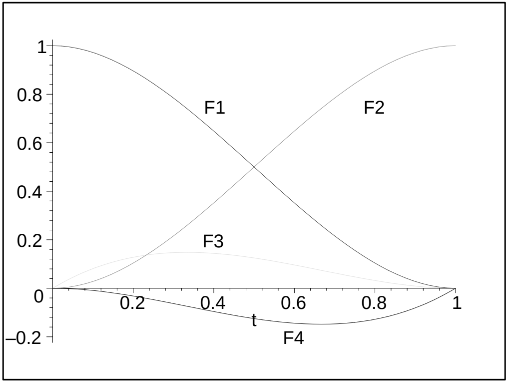
Fergusonpolynomier

$F_1(t) := 2t^3 - 3t^2 + 1$

$F_2(t) := -2t^3 + 3t^2$

$F_3(t) := t^3 - 2t^2 + t$

$F_4(t) := t^3 - t^2$



Fergusonkurve $\mathbf{p}(t) = F_1(t)P_b + F_2(t)P_s + F_3(t)\mathbf{v}_b + F_4(t)\mathbf{v}_s$

3.grads kurve med begyndelses- og slutpunkt P_b, P_s samt begyndelses- og sluthastighedsvektor $\mathbf{v}_b, \mathbf{v}_s$.

Bézierkurver af orden 3

Kubiske Bernsteinpolynomier

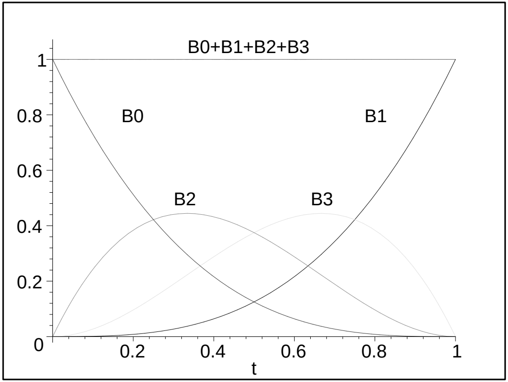
$B_{0,3}(t) := (1-t)^3 = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1$

$B_{1,3}(t) := 3(1-t)^2 t := 3t^3 - 6t^2 + 3t$

$B_{2,3}(t) := 3(1-t)t^2 = -3t^3 + 3t^2$

$B_{3,3}(t) := t^3$

$B_{0,3} + B_{1,3} + B_{2,3} + B_{3,3} = 1$



$\mathbf{B}(t) = B_{0,3}(t)Q_0 + B_{1,3}(t)Q_1 + B_{2,3}(t)Q_2 + B_{3,3}(t)Q_3$

3. grads Bézierkurve til kontrolpunkterne Q_0, Q_1, Q_2, Q_3.

Fergusonkurver og kubiske Bézierkurver 1

Sammenligning

Fergusonkurver er 3.grads kurver som bestemmes ved begyndelsespunkt P_b og slutpunkt P_s samt begyndelseshastighed $\mathbf{v}_b$ og sluthastighed $\mathbf{v}_s$.

Bézierkurver af grad 3 bestemmes ved fire kontrolpunkter: begyndelsespunkt Q_0 og slutpunkt Q_3 samt to håndtag (eller magneter) Q_1 og Q_2.
Man kan specificere den samme 3.ordens-kurve både som Fergusonkurve og som Bézierkurve.

Fergusonkurver og kubiske Bézierkurver 2

Hastighedsvektorer og kontrolpunkter

Fergusonkurve: endepunkter P_b, P_s, endehastighedsvektorer $\mathbf{v}_b, \mathbf{v}_s$.
Bézierkurve: kontrolpunkter Q_0, Q_1, Q_2, Q_3.
Hvis de skal bestemme samme 3. grads kurve:

$$F_1(t)P_b + F_2(t)P_s + F_3(t)\mathbf{v}_b + F_4(t)\mathbf{v}_s \overset{(*)}{=} B_{0,3}(t)Q_0 + B_{1,3}(t)Q_1 + B_{2,3}(t)Q_2 + B_{3,3}(t)Q_3.$$

Indsæt $t = 0, t = 1$: $P_b = Q_0, P_s = Q_3$ (samme endepunkter).
Indsæt $t = 0, t = 1$ i den afledede til ligning (*):

$$\mathbf{v}_b = -3Q_0 + 3Q_1 = 3\overrightarrow{Q_0Q_1} \qquad \mathbf{v}_s = -3Q_2 + 3Q_3 = 3\overrightarrow{Q_2Q_3}$$

Begynd.-hastighed	= 3$\cdot$ vektor mellem de to første kontrolpkter
Sluthastighed	= 3$\cdot$ vektor mellem de to sidste kontrolpkter