

Geometriske grundbegreber

7. lektion

Martin Raussen

Institut for matematiske fag
Aalborg Universitet

25.3.2008

7A – Kubiske splines

- ▶ Kubiske splines: Hvorfor?
- ▶ Hvordan? **Kubiske kurver** og **lineær algebra**
- ▶ **Fordele/ulemper** ved Bézierkurver og kubiske splines
- ▶ **B-splines**: Hvad kan man med dem?

Kubiske parameterfremstillinger

Mål: parameterfremstilling

$\mathbf{p}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3$ således at

$$\mathbf{p}(0) = \overrightarrow{OP_0}, \quad \mathbf{p}(1) = \overrightarrow{OP_1}, \quad \mathbf{p}'(0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{p}'(1) = \mathbf{v}_1.$$

Løsning: $\mathbf{p}(t) = F_1(t)\overrightarrow{OP_0} + F_2(t)\overrightarrow{OP_1} + F_3(t)\mathbf{v}_0 + F_4(t)\mathbf{v}_1$

$$F_1(t) := 2t^3 - 3t^2 + 1$$

$$F_2(t) := -2t^3 + 3t^2$$

$$F_3(t) := t^3 - 2t^2 + t$$

$$F_4(t) := t^3 - t^2$$

de fire **Ferguson**polynomier.

Kubiske splines

Mål: C^2 -parameterfremstilling for en kurve gennem punkter

$$P_0, P_1, \dots, P_n.$$

Den består af n **kubiske** parameterfremstillinger (**Ferguson**)

$$\mathbf{p}_1(t) \text{ gennem } P_0 \text{ og } P_1$$

$$\mathbf{p}_2(t) \text{ gennem } P_1 \text{ og } P_2$$

...

$$\mathbf{p}_n(t) \text{ gennem } P_{n-1} \text{ og } P_n.$$

$$C^2 \text{ svarer til : } \mathbf{p}'_i(1) = \mathbf{p}'_{i+1}(0) = \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{p}''_i(1) = \mathbf{p}''_{i+1}(0)$$

$$\text{Derudover ønskes: } \mathbf{p}''_1(0) = \mathbf{p}''_n(1) = \mathbf{0}$$

$$\text{(Krumning} = 0 \text{ i } P_0 \text{ og } P_1.)$$

¹1. og 2. afledede kontinuert!

Overættelse til lineær algebra

Ide: Find hastighedsvektorer $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sål. at

$$\mathbf{p}'_1(0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{p}'_i(1) = \mathbf{p}'_{i+1}(0) = \mathbf{v}_i, \quad 0 \leq i \leq n-1, \quad \mathbf{p}'_n(1) = \mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{p}''_1(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}''_i(1) = \mathbf{p}''_{i+1}(0), \quad 0 \leq i \leq n-1, \quad \mathbf{p}''_n(1) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{p}''_1(0) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad 2\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \quad = \quad \overrightarrow{3P_0P_1}$$

$$\mathbf{p}''_i(1) = \mathbf{p}''_{i+1}(0) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_{i-1} + 4\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1} \quad = \quad \overrightarrow{3P_{i-1}P_{i+1}}$$

$$\mathbf{p}''_n(1) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_{n-1} + 2\mathbf{v}_n \quad = \quad \overrightarrow{3P_{n-1}P_n}$$

Lineært ligningsystem: $(n+1)$ ligninger i $(n+1)$ ubekendte

$\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$

$$\text{Koefficientmatriks } \mathbf{A}_{n+1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Beregning af hastighedsvektorerne

Hastighedsvektorerne $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ er løsningerne til:

$$\mathbf{A}_{n+1} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{n-1} \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \overrightarrow{P_0 P_1} \\ \overrightarrow{P_0 P_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{P_{n-2} P_n} \\ \overrightarrow{P_{n-1} P_n} \end{bmatrix} \leftarrow \text{højresiden}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{n-1} \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = 3\mathbf{A}_{n+1}^{-1} \begin{bmatrix} \overrightarrow{P_0 P_1} \\ \overrightarrow{P_0 P_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{P_{n-2} P_n} \\ \overrightarrow{P_{n-1} P_n} \end{bmatrix}$$

Et simpelt tilfælde: $n = 3$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad 3\mathbf{A}_3^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(7\overrightarrow{P_0P_1} - 2\overrightarrow{P_0P_2} + \overrightarrow{P_1P_2}) \\ \frac{1}{2}(-\overrightarrow{P_0P_1} + 2\overrightarrow{P_0P_2} - \overrightarrow{P_1P_2}) \\ \frac{1}{4}(\overrightarrow{P_0P_1} - 2\overrightarrow{P_0P_2} + 7\overrightarrow{P_1P_2}) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(5\overrightarrow{P_0P_1} - \overrightarrow{P_1P_2})^2 \\ \frac{1}{2}\overrightarrow{P_0P_2} \\ \frac{1}{4}(5\overrightarrow{P_1P_2} - \overrightarrow{P_0P_1}) \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\begin{matrix} 27\overrightarrow{P_0P_1} - 2\overrightarrow{P_0P_2} + \overrightarrow{P_1P_2} = -7\overrightarrow{OP_0} + 2\overrightarrow{OP_0} + 7\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_1} - 2\overrightarrow{OP_2} + \\ \overrightarrow{OP_2} = -5\overrightarrow{OP_0} + 6\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2} = 5\overrightarrow{P_0P_1} - \overrightarrow{P_1P_2} \end{matrix}}{\quad}$$

Eksempel

$$P_0 : (4, 0), P_1 : (0, 4), P_2 : (4, 4);$$

$$\overrightarrow{P_0P_1} = [-4, 4], \overrightarrow{P_0P_2} = [0, 4], \overrightarrow{P_1P_2} = [4, 0];$$

$$\mathbf{v}_0 = \frac{1}{4}([-20, 20] - [4, 0]) = [-6, 5], \mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}[0, 4] = [0, 2],$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{4}([20, 0] - [-4, 4]) = [6, -1].$$

Nu indsættes $P_0, P_1, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$ i parameterfremstilling $\mathbf{p}_1(t)$ for Fergusonkurve nr. 1:

$$\mathbf{p}_1(t) = (1 - 3t^2 + 2t^3)[4, 0] + (3t^2 - 2t^3)[0, 4] + (t - 2t^2 + t^3)[-6, 5] + (-t^2 + t^3)[0, 2] = [4 - 6t + 2t^3, 5t - t^3], t \in [0, 1];$$

og tilsvarende $P_1, P_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ i parameterfremstilling $\mathbf{p}_2(t)$ for Fergusonkurve nr. 2:

$$\mathbf{p}_2(t) = (1 - 3t^2 + 2t^3)[0, 4] + (3t^2 - 2t^3)[4, 4] + (t - 2t^2 + t^3)[-0, 2] + (-t^2 + t^3)[6, -1] = [6t^2 - 2t^3, -4 + 2t - 3t^2 + t^3], t \in [0, 1].$$

Kurver med $n + 1$ kontrolpunkter

n -te ordens Bézierkurver defineres ved hjælp af

Bernstein-polynomier $B_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$ af grad n .

$$B_n(t) = B_{0,n}(t)Q_0 + \cdots + B_{i,n}(t)Q_i + \cdots + B_{n,n}(t)Q_n.$$

B-splines defineres ved hjælp af stykkevis polynomiale funktioner af grad k - som er 0 på en del af intervallet.

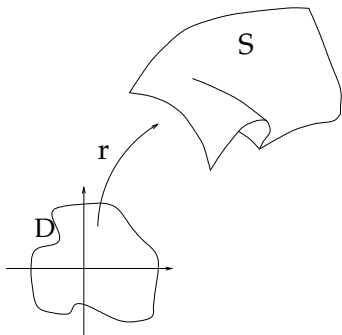
	støttestrukturer	grad	glathed	lokal kontrol
kubisk spline	alle	3	C^2	\vdots
Bézierkurve	endepunkter	n	C^∞	\vdots
B-spline	endepunkter	k	C^{k-2}	delvis ³

³Kontrolpunkt har indflydelse på område svarende til $k + 1$ punkter

7B – Introduktion til flader

- ▶ Funktioner af **to** variable
- ▶ Partielle afledede
- ▶ Parameterfremstillinger: **vektor**funktioner af **to** variable
- ▶ Eksempler

Parameterfremstilling for en flade



En parameterfremstilling for en flade S i rummet er givet ved en vektorfunktion af **to** variable (u, v) :

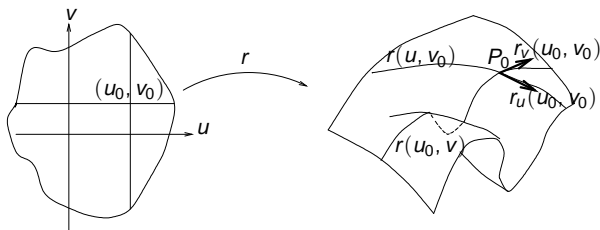
$$\mathbf{r} : \mathbf{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbf{R}^3,$$

$$\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)].$$

Horizontale og vertikale linier overføres til et **krumt koordinatsystem** på fladen.

Eksempel: En kortprojektion for en **kugleflade**: det krumme koordinatsystem består af **længde-** og **breddecirkler**.

Parameterkurver og partielle afledede



Gennem punktet P_0 med $\overrightarrow{OP_0} = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ løber

u -kurven (1. parameterkurve) $\mathbf{r}(u, v_0)$ med hastighedsvektor $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ i P_0

v -kurven (2. parameterkurve) $\mathbf{r}(u_0, v)$ med hastighedsvektor $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ i P_0