Geometriske grundbegreber
8. lektion

Martin Raussen

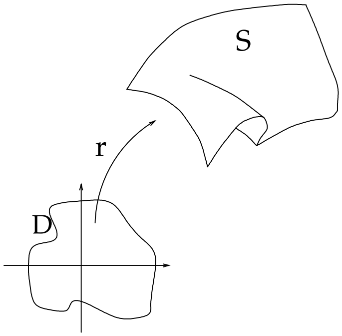
Institut for matematiske fag
Aalborg Universitet

1.4.2008

8A – Flader, tangentplaner, normaler

- (Regulære) parameterfremstillinger for en flade
- Eksempler
- Kurver på flader og deres tangenter
- Tangentplan i et punkt på fladen
- Normalvektor i et punkt på fladen

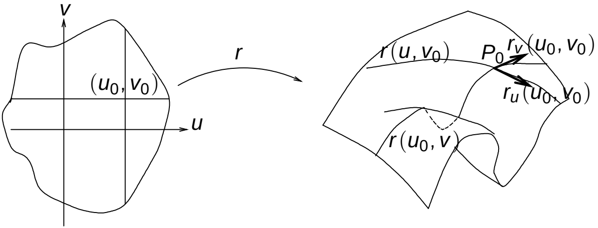
Parameterfremstilling for en flade



En parameterfremstilling for en flade S i rummet er givet ved en vektorfunktion af to variable (u, v): $\mathbf{r} : \mathbf{R}^2 \supseteq D \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$. Horizontale og vertikale linier overføres til et krumt koordinatsystem på fladen.

Eksempel: En kortprojektion for en kugleflade: det krumme koordinatsystem består af længde- og breddecirkler.

Parameterkurver og partielle afledede

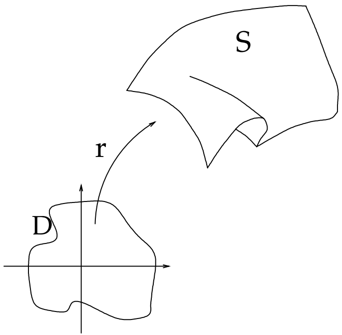


Gennem punktet P_0 med $\overrightarrow{OP_0} = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ løber

u-kurven (1. parameterkurve) $\mathbf{r}(u, v_0)$ med hastighedsvektor $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ i P_0

v-kurven (2. parameterkurve) $\mathbf{r}(u_0, v)$ med hastighedsvektor $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ i P_0

Regulære parameterfremstillinger



$D \subseteq \mathbf{R}^2$ åben.
$\mathbf{r} : D \to \mathbf{R}^3$ en glat (C^∞) og injektiv (én til én) vektorfunktion af to variable.
$\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$

De partielle afledede $\mathbf{r}_u(u_0, v_0), \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ er lineært **uafhængige** for alle $(u_0, v_0) \in D$.
Dermed udspænder de en (tangent)plan!

Kurver på en flade og tangentvektorer

Givet parameterfremstilling $\mathbf{r}: \mathbf{R}^2 \supseteq U \to \mathbf{R}^3$. Den beskriver korrespondance mellem kurver i parameterområdet U i planen og kurver på fladen S givet ved

$$[u(t), v(t)] \in U \mapsto \mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)) \in \mathbf{R}^3.$$

Beregning af hastighedsvektor/tangent til denne kurve i P_0 med $\overrightarrow{OP_0} = [u_0, v_0] = \mathbf{x}(u(t_0), v(t_0))$ ved hjælp af kædereglen:

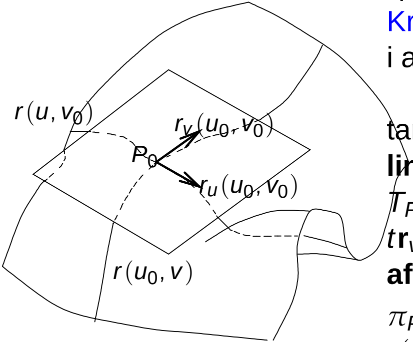
$$\mathbf{x} : I \to \mathbf{R}^3, \qquad t \mapsto [u(t), v(t)] \mapsto \mathbf{r}(u(t), v(t)).$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t_0) &= u'(t_0)\mathbf{r}_u(u_0, v_0) + v'(t_0)\mathbf{r}_v(u_0, v_0) \\ &\in span\{\mathbf{r}_u(u_0, v_0), \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\}.\end{aligned}$$

Alle hastighedsvektorer til kurver på S gennem P_0 ligger altså i denne tangentplan!

Tangentplan

Parameterfremstillinger for lineær og affin tangentplan



Tangentplan til fladen S i punktet P_0 = $span\{\mathbf{r}_u(u_0, v_0), \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\}$.
Krav: $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ lineært uafhængige i alle $[u, v] \in U$.

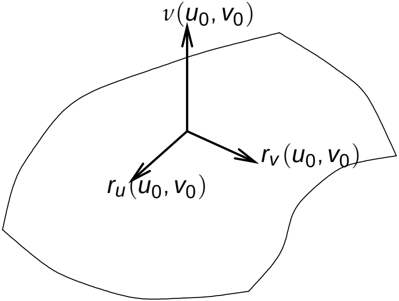
Parameterfremstillinger for tangentplan i P_0:

lineær tangentplan:
$T_{P_0}S = \{s\mathbf{r}_u(u_0, v_0) + t\mathbf{r}_v(u_0, v_0),\ s, t \in \mathbf{R}\}$.

affin tangentplan:
$\pi_{P_0}S = \{Q \in \mathbf{E}^3 | \overrightarrow{OQ} = \mathbf{r}(u_0, v_0) + s\mathbf{r}_u(u_0, v_0) + t\mathbf{r}_v(u_0, v_0),\ s, t \in \mathbf{R}\}$.

Den affine tangentplan approksimerer fladen ved P_0.

Normalvektor og ligning for tangentplan



En normalvektor til S i P_0: $\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$.

Enhedsnormalvektor til S i P_0:

$$\nu = \frac{\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)}{|\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)|}$$

Ligning for affin tangentplan $\pi_{P_0}S$:
$\overrightarrow{OQ} = \mathbf{x} = [x, y, z]$ skal opfylde ligningen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \text{ med:}$$

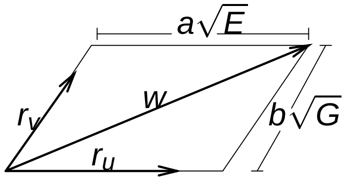
- $[a, b, c] = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \leftarrow$ normalvektor
- $[x_0, y_0, z_0] = \mathbf{r}(u_0, v_0) \leftarrow$ punkt i S og i tangentplan

8B – Målinger på en flade

- Måling i “skæve” koordinater
- 1. grundform = “krum Pythagoras”
- Længde af en fladekurve
- Areal af et fladestykke

Pythagoras i skæve koordinater

Længde af vektor $\mathbf{w} = a\mathbf{r}_u + b\mathbf{r}_v$ i det "skæve" koordinatsystem med basisvektorer $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$:



$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{w}|^2 = |a\mathbf{r}_u + b\mathbf{r}_v|^2 = \\
&(a\mathbf{r}_u + b\mathbf{r}_v)\cdot(a\mathbf{r}_u + b\mathbf{r}_v) = \\
&a^2(\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_u) + 2ab(\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v) \\
&+b^2(\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v) = \\
&a^2 E + 2abF + b^2 G.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(u,v) &= \mathbf{r}_u(u,v)\cdot\mathbf{r}_u(u,v)\\
F(u,v) &= \mathbf{r}_u(u,v)\cdot\mathbf{r}_v(u,v)\\
G(u,v) &= \mathbf{r}_v(u,v)\cdot\mathbf{r}_v(u,v)
\end{aligned}
$$

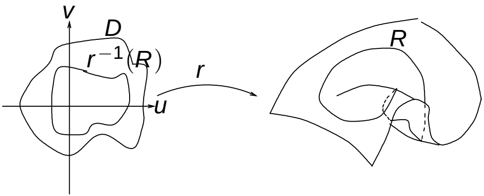
Kurvelængde i krumme koordinater

Kurve givet ved parametrisering $\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$.
Hvordan kan kurvens koordinater $(u(t), v(t))$ i kortet bruges til at beregne kurvens længde på fladen?

kurve	$\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$
hastighed	$\mathbf{x}'(t) = u'\mathbf{r}_u + v'\mathbf{r}_v$
fart[2]	$\lvert\mathbf{x}'(t)\rvert^2 = Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2$
kurvelængde[1]	$s(T) = \int_a^T \lvert\mathbf{x}'(t)\rvert\, dt = \int_a^T \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, dt.$

[1] længde af kurven $(u(t), v(t))$ i planen: $\int_a^T \sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2}\, dt$

Areal i krumme koordinater



Beregning af Rs areal ved hjælp af parameterområdet $\mathbf{r}^{-1}(R) = \{[u, v] \in U \mid \mathbf{r}(u, v) \in R\}$:

$$\begin{aligned} \text{Areal}(R) &= \int\int_{\mathbf{r}^{-1}(R)} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dudv \\ &= \int\int_{\mathbf{r}^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} \, dudv \end{aligned}$$

Integranden $\sqrt{EG - F^2}$ udtrykker den lokale arealforvanskning under parameterfremstillingen.

Eksempel: Kugleflade med radius ρ

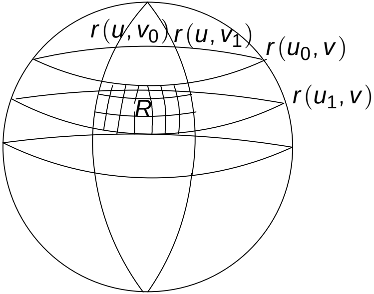
Parameterfremstilling:
$\mathbf{r}(u,v) = [\rho \sin u \cos v, \rho \sin u \sin v, \rho \cos u]$
$\mathbf{r}_u(u,v) = [\rho \cos u \cos v, \rho \cos u \sin v, -\rho sinu]$
$\mathbf{r}_v(u,v) = [-\rho \sin u \sin v, \rho \sin u \cos v, 0]$.
$(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)(u,v) = [\rho^2 \sin^2 u \cos v, \rho^2 \sin^2 u \sin v, \rho^2 \sin u \cos v] \parallel \mathbf{r}(u,v)$.
1. fundamentalform:

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \mathbf{r}_u(u,v) \cdot \mathbf{r}_u(u,v) = \rho^2 \\ F(u,v) &= \mathbf{r}_u(u,v) \cdot \mathbf{r}_v(u,v) = 0 \\ G(u,v) &= \mathbf{r}_v(u,v) \cdot \mathbf{r}_v(u,v) = \rho^2 \sin^2 u \end{aligned}$$

$$(EG - F^2)(u,v) = \rho^4 sin^2 u; \sqrt{(EG - F^2)(u,v)} = \rho^2 |\sin u|.$$

Bælteareal på kugleflade

Bælte B afgrænset af $u_0 \leq u \leq u_1, v_0 \leq v \leq v_1$:



$Ar(B)$
$= \int\int_{\mathbf{r}^{-1}(R)} \rho^2 |\sin u| \, dudv$
$= \rho^2 \int_{u_0}^{u_1} (\int_{v_0}^{v_1} |\sin u| \, dv) du$
$= \rho^2 \int_{u_0}^{u_1} (v_1 - v_0) \sin u du$
$= \rho^2 (v_1 - v_0)(\cos u_0 - \cos u_1).$

Areal af kugleflade:
$u_0 = 0,\ u_1 = \pi,$
$v_0 = 0,\ v_1 = 2\pi.$
$Ar(S(\rho)) =$
$\rho^2 (2\pi - 0)(1 - (-1))$
$=4\pi\rho^2.$