20. lektion

Mandag, den 3.12.2007, kl. 8:15 – 12:00.

Repetition og Perspektivering:

Hold 1: Auditorium 1. Hold 2: A314.
kl. 8:15 – 8:40.
Komplekse tal.

Opgaveregning:

kl. 8:45 – 10:35 i grupperummene.

Opgaver:

OMA1, pp. 32 – 34 Regning med komplekse tal

- 401,403,404.

Komplekse tal i polær notation

- 406,408,411.

Komplekse tal i talplanen

- 414,422.

Egenskaber af komplekse tal

- 417,418,420,421[1].

Facit til udvalgte opgaver

404 (a) 0; (b) 0.

411 1.

414 (a) $-z_0$; (b) $\bar{z}_0$; (c) $-\bar{z}_0$; (d)$i\bar{z}_0$.

417 Vink: $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$; $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

418 (a) $z \in \{\mathbf{C}| \mid z \mid = 1, z \neq 1\}$; (b) $z \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$.

422 (a) det indre af en cirkelskive; (b) en ret linie; (c) et liniestykke.

Forelæsning

Hold 1: Auditorium 1. Hold 2: A314.
kl. 10:40 – 12:00.

Mål og indhold:

Polynomiet $p(x) = x^2 + 1$ har ingen rod inden for de reelle tal: For alle reelle tal x gælder: $p(x) \neq 0$. Men det komplekse tal $x = i$ er en rod for dette polynomium, idet $p(i) = i^2 + 1 = 0$. Mere generelt kan man vise, at et hvilket som helst komplekst polynomium $P(z)$[2] har komplekse rødder og at det faktisk kan skrives som et produkt af polynomier af første grad:
$P(z) = c(z - z_1)^{p_1}(z - z_2)^{p_2} \cdots (z - z_s)^{p_s}$. Her står z_i for polynomiets (komplekse) rødder og p_i er z_is multiplicitet. Dette resultat kaldes algebraens fundamentalsætning.

For et polynomium $p(x)$ med reelle koefficienter gælder specielt: Hvis det komplekse tal z er rod i p, så er det konjugeret komplekse tal $\bar{z}$ ligeledes rod i p. Derfor kan et reelt polynomium skrives som et produkt af lineære (1. grads) og kvadratiske (2. grads) reelle polynomier.

Der findes ingen generelle metoder til nøjagtig bestemmelse af rødder for poly-

[1] Vink: Gang udtrykket med tallet $1 - w$!
[2] og dermed også et hvilket som helst reelt polynomium

nomier bortset fra dem af grad op til fire. Først ser vi på bestemmelsen af n-te rødder af et komplekst tal a (dvs. løsninger af den binome ligning $z^n - a = 0$). Skrives a på polær form $a = r_\theta$, så har ligningen n komplekse løsninger på formen $z = \sqrt[n]{r}_{\frac{\theta+2\pi p}{n}}$, $0 \leq p < n$.

Man kan generalisere den fra skolen kendte diskriminantmetode til løsning af andengradsligninger $p(z) = az^2 + bz + c = 0$ til polynomier med komplekse koefficienter. Men diskriminanten $D = b^2 - 4ac$ er nu som regel et komplekst tal, og vi skal benytte en af de to rødder $\pm\sqrt{D}$, dvs. løsninger af polynomiet $z^2 - D = 0$.

Litteratur:

HEJ, Kap. 4.3, pp. 4.16 – 4.27.

Næste gang:

Torsdag, den 6.12, kl. 12:30 – 16:15.
Kompleks eksponentialfunktion. Første ordens differentialligninger
HEJ, 4.4, pp. 4.27 – 4.31 og 1.3, pp. 1.7 – 1.11.