21. lektion

Torsdag, den 6.12.2007, kl. 12:30 – 16:15.

Repetition og Perspektivering:

Hold 1: Auditorium 1. Hold 2: A314.
kl. 12:30 – 12:55.
Rødder i komplekse polynomier

Opgaveregning:

kl. 13:00 – 14:50 i grupperummene.

Opgaver:

OMA1, pp. 35 – 36 Rødder i andengradsligninger osv.

- 425,426,427[1],429.

n-te rødder af komplekse tal

- 430,431,432,434,435[2].

Facit til udvalgte opgaver

425 $z_1 = 3+2i, z_2 = 2+3i$.

426 $z_1 = 1+i, z_2 = 2-3i$.

427 (a) $z_1 = -3-i, z_2 = 1+i$; (b) $w_{1/2} = -1 \pm \frac{1}{2}(\sqrt{2\sqrt{3}+4} + i\sqrt{2\sqrt{3}-4})$; $w_{3/4} = -1 \pm \frac{1}{2}(\sqrt{2\sqrt{3}-4} - i\sqrt{2\sqrt{3}+4})$.

429 $z_1 = 1, z_2 = -1+4i$;
$w_{1/2} = \pm 1, w_{3/4} = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{2\sqrt{17}-2} + i\sqrt{2\sqrt{17}+2})$.

430 (a) $z_1 = 1, z_2 = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}), z_3 = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$;
(b) $z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i), z_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i), z_3 = -i$.

431 (a) $z = \pm(1\pm i)$;
(b) $z_1 = \frac{\sqrt[3]{4}}{4}(\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1))$; $z_2 = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}(-1+i)$; $z_3 = \frac{\sqrt[3]{4}}{4}(-\sqrt{3}+1-i(\sqrt{3}+1))$.

432 (1) $x = \pm\sqrt{2}(1\pm i)$;
(2) $x^4+16 = (x^2+2\sqrt{2}x+4)(x^2-2\sqrt{2}x+4)$.

434 (1) $x_{1/2} = \pm 1$; $x_{3-6} = \pm\frac{1}{2}(\pm 1 + i\sqrt{3})$;
(2) $x^6-1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x-1)$.

435 (d) $z_1 = z_2 = 1; z_3 = -i, z_{4/5} = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{3}+i)$.

Forelæsning

Hold 1: Auditorium 1. Hold 2: A314.
kl. 14:55 – 16:15.

Mål og indhold:

Eksponentialfunktionen e^t udvides til komplekse exponenter $z = x+iy$ ved definitionen

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Den afbilder de reelle tal x i den positive realakse (velkendt) og de rent imaginære tal iy i enhedscirklen i den komplekse

[1] Find først $z+1$!
[2] Vink til (e): Skriv polynomiet som produkt af to faktorer

plan: $e^{iy} = \cos y + i \sin y$. De trigonometriske funktioner (for reelle og komplekse (!) tal) kan udtrykkes ved den komplekse eksponentialfunktion ved Eulers formler:

$$\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}); \sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy}).$$

Ligesom den reelle eksponentialfunktion overfører den addition af tal i multiplikation af (resultattal), dvs. der gælder:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, z_1, z_2 \in \mathbf{C}.$$

Eksponentialfunktionen leverer løsninger til vigtige typer differentialligninger, men hvad betyder det at differentiere en funktion med komplekse værdier? En kompleks funktion f kan skrives som $f(t) = Re(f(t)) + iIm(f(t)$; man differentierer bare realdelen og imaginærdelen hver for sig:

$$f'(t) = (Re(f(t)))' + i(Im(f(t))'.$$

I det specielle tilfælde $f(t) = e^{Rt}$ med $R = x + iy \in \mathbf{C}$, dvs. $e^{Rt} = e^x \cos yt + ie^x \sin yt$ fås (efter udregning) en udvidelse af reglen for den reelle eksponentialfunktion:

$$\frac{d}{dt}e^{Rt} = Re^{Rt}.$$

I den resterende del af kurset beskæftiger vi os med differentialligninger og deres løsninger. En differentialligning beskriver en sammenhæng mellem en funktion og en eller flere af dens afledede gennem en ligning. Den højeste forekommende afledede kaldes ligningens orden. I kender fra ungdomsuddannelserne differentialligningen $x'(t) + px(t) = q$ (af første orden) med løsningsmængden

$$\{\frac{q}{p} + Ce^{-pt} | C \in \mathbf{R}\}.$$

Løsningsfunktioner beskriver (afhængig af ps fortegn) eksponentiel vækst eller henfald.

Man kan også løse en første ordens differentialligning $x'(t) + p(t)x(t) = q(t)$ når koefficienterne $p(t)$ og $q(t)$ ikke længere er konstanter, men funktioner. For at løse en homogen differentialligning (med $p(t) = 0$) skal man bruge en stamfunktion $P(t)$ til funktionen $p(t)$; løsningsmængden bliver så: $\{Ce^{-P(t)} | C \in \mathbf{R}\}$. Løsning af den oprindelige inhomogene ligning kræver en stamfunktion $Q(t)$ af funktionen $q(t)e^{Pt}$. Og løsningsmængden er nu på formen $\{Ce^{-P(t)}Q(t) | C \in \mathbf{R}\}$.

Litteratur:

HEJ, kap. 4.4, pp. 4.27 – 4.31;
kap. 1.3, pp. 1.7 – 1.11.

Næste gang:

Mandag, den 10.12., kl. 8:15 - 12:00.
Homogene lineære differentialligninger af anden orden. Karakterligningen.
HEJ, 5.1 –5.2, pp. 5.8.