NIKOLAJ HESS-NIELSEN
MARTIN RAUSSEN

22. lektion

Mandag, den 10.12.2007, kl. 8:15 – 12:00.

Repetition og Perspektivering:

Hold 1: Auditorium 1. Hold 2: A314.
kl. 8:15 – 8:40.
Kompleks eksponentialfunktion. Lineære differentialligninger af 1. orden.

Opgaveregning:

kl. 8:45 – 10:35 i grupperummene.

Opgaver:

OMA1, pp. 37 – 41 Kompleks eksponentialfunktion

- 437,440,442.

Lineære differentialligninger af 1. orden

- 108,110,112,113.

Komplekse ligninger

- 475,478,479,482,483,484,489.

Facit til udvalgte opgaver

437 (a) $A = 1 - i, B = 3i$;
(b) $A = 1 + i, B = -1 + 2i$;
(c) $A = 1 + 3i, B = 1 + i$;
(d) $A = k_1 - ik_2, B = \alpha + i\beta$.
(Der findes flere løsninger)

442 $\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x$; $\sin 5x = \sin^5 x - 10\sin^3 x \cos^2 x + 5\sin x \cos^4 x$. [1]

110 $x = -\frac{1}{2}(t^3 + \frac{1}{t}),\ 0 < t$.

Forelæsning

Hold 1: Auditorium 1. Hold 2: A314.
kl. 10:40 – 12:00.

Mål og indhold:

Mange fysiske fænomener, f.eks. svingninger, beskrives af lineære differentialligninger af anden orden; de ukomplicerede af dem har konstante koefficienter. En ligning af denne type er på formen $x'' + bx' + cx = q(t)$ med konstante koefficienter $b, c \in \mathbf{R}$. Man løser differentialligningen når man finder en – og helst alle – 2 gange differentiable funktioner $x(t)$ (af en variabel t) som tilfredsstiller ligningen.

I første omgang koncentrerer vi os om homogene ligninger hvor højresiden $q(t) = 0$. Har differentialligningen løsninger som er eksponentialfunktioner? Vi prøver med funktionen $f(t) = e^{Rt}$ og finder at denne funktion er løsning hvis og kun hvis R er løsning til karakterligningen $R^2 + bR + c = 0$[2]. Karakterligningen er en andengradsligning med reelle koefficienter og har derfor løsninger $R_k = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$, $k = 1, 2$ med $D = b^2 - 4c$. Nu skal

[1]Vink: Binomialformel $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

[2]Erstat bare den $i - te$ afledede af x med den i-te potens af tallet R!

man skelne mellem de mulige fortegn for diskriminanten D:

$D > 0$: Differentiallingnen har to fundamentale løsninger $e^{R_1 t}$ og $e^{R_2 t}$.

$D = 0$: Karakterligningen har en dobbeltrod $R = -\frac{b}{2a}$. Differentialligningen har to fundamentale løsninger e^{Rt} og te^{Rt}.

$D < 0$: Karakterligningen har to konjugeret komplekse rødder $R_k = \frac{-b+i\sqrt{-D}}{2}$; fundamentale løsninger findes som realdel, hhv. imaginærdel af den komplekse eksponentialfunktion $e^{R_1 t}$[3], dvs. funktionerne $e^{-\frac{b}{2}t}\cos\frac{-\sqrt{D}}{2}t$ og $e^{-\frac{b}{2}t}\sin\frac{-\sqrt{D}}{2}t$.

Kender man disse to fundamentalløsninger $f_1(t), f_2(t)$ til differentialligningen, så fås alle andre læsninger ved superposition:

$$L = \{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$$

idet alle linearkombinationer af løsninger er løsninger igen. Ovenikøbet kan man ved løsning af et system af to lineære ligninger finde reelle tal c_1, c_2 som løser differentialligningen med begyndelsesbetingelserne $x(t_0) = x_0$ og $x'(t_0) = v_0$ (som fastlægger sted og hastighed på et givet tidspunkt t_0).

Har man nu med L fundet alle løsninger til differentialligningen? Ja, det sikres af eksistens- og entydighedssætning 5.1 (p. 5.2): Der findes netop én løsning til differentiallinginen med givne begyndelsesbetíngelser – og denne løsning har vi fundet i L. Med andre ord: L er løsningsmængden til den homogenen differentialligning.

Litteratur:

HEJ, kap. 5.1 – 5.2.

Næste gang:

Torsdag, den 13.12, kl. 12:30 – 16:15.
Inhomogene differentialligninger af anden orden. HEJ, kap. 5.3.

[3]Hvis man tager R_2 i stedet for R_1, så får man ækvivalente løsninger.