NIKOLAJ HESS-NIELSEN
MARTIN RAUSSEN

23. lektion

Torsdag, den 13.12.2007, kl. 12:30 – 16:15.

Repetition og Perspektivering:

Hold 1: Auditorium 1. Hold 2: A314.
kl. 12:30 – 12:55.
Homogene anden ordens differentialligninger.

Opgaveregning:

kl. 13:00 – 14:50 i grupperummene.

Opgaver:

OMA1, pp. 42 – 43 Homogene differentialligninger af 2. orden

- 503,505,508,509[1].

OMA1, pp. 3 – 9 Lineære differentialligninger af 1. orden

- 113,114,115,117,124.

Facit til udvalgte opgaver

503 $L_H = \{x(t) = c_1e^{2t} + c_2e^t, t \in \mathbf{R} | c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$

505 $L_H = \{x(t) = c_1e^{-t}\cos(2t) + c_2e^{-t}\sin(2t), t \in \mathbf{R} | c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$

508 $L_H = \{x(t) = c_1e^{3t} + c_2te^{3t}, t \in \mathbf{R} | c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$

509 (a) $\varphi_c(t) = x(t) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-c})e^{\frac{1}{c}(1+\sqrt{1-c})t)} + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+c})e^{\frac{1}{c}(1-\sqrt{1-c})t)}, t \in \mathbf{R}$
(b) $\varphi_1(t) = x(t) = e^t, t \in \mathbf{R}$
(c) $\lim_{c \to 1^-} \varphi_c(t) = \varphi_1(t), t \in \mathbf{R}$

114 (a) nej; (b) ja;
(c) $L_I = \{x(t) = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t) + c_1e^{-t}, t \in \mathbf{R}\}$.

Forelæsning

Hold 1: Auditorium 1. Hold 2: A314.
kl. 14:55 – 16:15.

Mål og indhold:

Nu skal vi få styr på løsningsmængderne af lineære differentialligninger. Eksistens- og entydighedssætningen[2] siger at der findes netop en entydig løsning for en lineær differentiallingning af

1. orden givet en begyndelsesbetingelse på formen $x(t_0) = x_0$ – en værdi af x kan foreskrives;

2. orden givet en begyndelsesbetingelse på formen $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = v_0$ – en værdi af x og af x' – for samme t_0! –kan foreskrives.

[1] Der menes: $c \to 1^-$
[2] Sætn. 1.4 og 5.1

Det er smart at unytte strukturen i løsningmængderne L_H og L_I af en homogen og en inhomogen differentialligning (hvis vi blander begge dele, så er den homogene ligning den hvor høresiden i den inhomogene ligning erstattes med 0). Det er nemt at verificere for lineære differentialligninger af en vilkårlig orden:

1. (Superposition) $x_1, x_2 \in L_H \Rightarrow x_1 + x_2 \in L_H$.
   Her drejer det sig om summen af to funktioner!

2. (Linearitet) $x_1, x_2 \in L_H, c_1, c_2 \in \mathbf{R} \Rightarrow c_1x_1 + x_2x_2 \in L_H$.

3. $y \in L_I, x \in L_H \Rightarrow y + x \in L_I$.

4. $y_1, y_2 \in L_I \Rightarrow y_1 - y_2 \in L_H$.

For en differentialligning af 2. orden betyder (2) sammen med eksistens-og entydighedssætnignen:

homogen Kender man to uafhængige løsninger $x_1, x_2 \in L_H$, dvs. $x_2 \neq cx_1$, så kender man dem allesammen; de er netop givet ved $L_H = \{c_1x_1 + x_2x_2 | c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$.

inhomogen Kender man bare én (talemåden er: partikulær) løsning $y \in L_I$ og kender man alle løsninger i L_H, så kender man $L_I : L_I = y + L_H$.

Læg mærke til at den sidste ligning er en ligning mellem mængder. Den siger:

1. Hver funktion $y + x, x \in L_H$ ligger i L_I (højre side er indeholdt i venstre side)

2. Hver funktion $z \in L_I$ kan skrives på formen $y + x$ med $x \in L_H$ (venstre side er indeholdt i højre side)

Hvordan finder man så bare den ene partikulære løsning af en inhomogen ligning? I første omgang bliver der tale om et (systematisk) gæt!

Litteratur:

HEJ, kap. 5.3 – 5.4, pp. 5.8 – 5.17

Næste gang:

Tirsdag, den 18.12., kl. 12:30 - 16:15.
Inhomogene lineære differentialligninger af anden orden.
HEJ, 5.4, 5.12 – 5.17