24. lektion

Tirsdag, den 18.12.2007, kl. 12:30 – 16:15.

Repetition og Perspektivering:

Hold 1: Auditorium 2. Hold 2: A314.
kl. 12:30 – 12:55.
Struktur på løsningsmængder af homogene og inhomogene lineære differentialligninger.

Opgaveregning:

kl. 13:00 – 14:50 i grupperummene.

Opgaver:

OMA1, pp. 43 – 44 Struktur på løsningsmængderne

- 510,511.

Løsninger af inhomogene differentialliginger

- 512,516,517.

1.ordens differentialligninger (repetition)

- 117,124.

Facit til udvalgte opgaver

510 (a) $L_H = \{x(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$; (b) $x'' - x = -2\sin t$.

516 $L_I = \{x(t) = 2\cos t - \sin t + c_1e^{-t}\cos t + c_2e^{-t}\sin t \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$; (b) $x(t) = 2\cos t - \sin t + -2e^{-t}\cos t$.

Forelæsning

Hold 1: Auditorium 2. Hold 2: A314.
kl. 10:40 – 12:00.

Mål og indhold:

Vi har sidste gang fundet ud af, at kendskab til bare en (partikulær) løsning af en inhomogen ligning $x'' + bx' + cx = q(t)$ samt kendskab til løsningsmængden L_H af den tilsvarende homogene ligning (givet ved to fundamentalløsninger) er nok til at bestemme løsningsmængden L_I af det inhomogene system. Men hvordan finder man en løsning til det inhomogene system?

Man kan gætte: Når højresiden $q(t)$ er et polynomium, så forsøger man med et polynomium $x(t)$ af samme grad. Når $q(t)$ er givet ved en eksponentialfunktion, så forsøger man sig med en eksponentialfunktion (samme eksponent, men forsynet med en konstant faktor).

Det mest interessante tilfælde (både fra et matematisk og et anvendelsesynspunkt) optræder når højresiden er givet ved trigonometriske funktioner (eller evt. en kombination af eksponential- og trigonometriske funktioner) – nu hjælper den komplekse synsvinkel igen: Hvis $q(t)$ kan identificeres som realdel eller imaginærdel af en funktion af typen Ae^{iBt} bør man forsøge med en funktion af typen $x(t) = Ce^{iBt}$; her er A, B, C komplekse tal; en løsning til den oprindelige ligning vil så være givet ved realdelen, hhv. imaginærdelen af $x(t)$.

Superpositionsmetoden hjælper til at finde en løsning til en højreside $q(t) = a_1q_1(t) + a_2q_2(t)$: Kender man løsninger $x_1(t)$, hhv. $x_2(t)$ til højresiderne $q_1(t)$, hhv. $q_2(t)$, så er $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ løsning til højresiden $q(t)$.

Løsninger kan også findes på systematisk vis: Kender man to fundamentalløsninger $x_1, x_2 \in L_H$ af den tilsvarende homogene ligning, så prøver man at finde en løsning på formen $x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$ ("konstanternes variation"). Ved at kræve at

$$\begin{aligned} c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) &= 0 \\ c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) &= q(t) \end{aligned}$$

fås en ligningssystem i to ubekendte funktioner(!) $c_1'(t), c_2'(t)$, som kan løses. Funktionerne $c_1(t), c_2(t)$ findes efterfølgende ved integration.

Fra eksistens- og entydighedessætningen ved vi, at der findes netop en løsning til den oprindelige differentialligning som opfylder givne begyndelsesbetingelser $x(t_0) = x_0$ og $x'(t_0) = v_0$. Denne ene løsning findes ved at analysere hvad begyndelsesbetingelserne betyder for en vilkårlig løsning $x(t) = x_p(t) + c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \in L_I$ af den inhomogene ligning ($x_p(t)$ en partikulær løsning i L_I, $x_1(t), x_2(t)$ to uafhængige løsninger i L_H). Man føres frem til et lineært ligningssystem i de to ubekendte c_1, c_2. En løsning af dette system fører frem til *den* ønskede løsning.

Litteratur:

HEJ, kap. 5.5. Evt. App. H.

Næste – og sidste gang:

Torsdag, den 20.12, kl. 12:30 – 16:15.
E-opgave 4.