

Formålet med miniprojektet er at frembringe et fraktalt træ som i figuren nederst. Vi tager udgangspunkt i de to affine transformationer

$$A_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$A_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

med en vinkel $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ og en kontraktionsfaktor $0 < c < 1$.

1. Beskriv afbildningerne A_1 og A_2 geometrisk som komposition af en drejning R om Origo (med hvilken vinkel?), en skalering (med hvilken kontraktionsfaktor) og en parallelforskydning (med hvilken vektor \mathbf{b})
2. Afbildningen A_1 kan også beskrives som komposition af en drejning \bar{R} med vinklen α om et punkt P_0 i planen med stedvektor $\mathbf{x}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ og en skalering – altså uden brug af en parallelforskydning. Angiv en metode til bestemmelse af koordinaterne til omdrejningspunktet P_0 .
 Vink: Forklar geometrien bag ligningen $cR\mathbf{x} + \mathbf{b} - \mathbf{x}_0 = cR(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ og angiv en formel til bestemmelse af \mathbf{x}_0 med udgangspunkt i denne ligning: Isolér \mathbf{x}_0 og beregn stedvektoren!
3. Som udgangspunkt for et itereret funktionssystem vælges to rektangler R_0 med hjørnepunkter i $(\pm 2, 0), (\pm 2, 4)$ og R med

hjørnepunkter $(\pm \frac{1}{4}, 0), (\pm \frac{1}{4}, 1)$. For $\alpha = \frac{\pi}{6} \simeq 30^\circ$ og $c = \frac{3}{4}$ skal man tegne foreningsmængderne

$$R_1 = R \cup A_1(R_0) \cup A_2(R_0)$$

bestående af alle punkter som er indeholdt i mindst en af de tre punktmængder; og tilsvarende

$$R_2 = R \cup A_1(R_1) \cup A_2(R_1).$$

Hvordan mon

$$R_n = R \cup A_1(R_{n-1}) \cup A_2(R_{n-1})$$

ser ud for store n ?

Hvorfor tilføjer man R i hvert trin?

4. Rhino/Grasshopper: Byg transformationerne A_1 og A_2 ved hjælp af Rotate, Scale og Move. Vinklen α og kontraktionsfaktoren c indstilles på sliders.

Frembring et fraktalt træ i etapper med udgangspunkt i rektanglerne R_0 og R – en kontraktionsfaktor $c = \frac{3}{4}$ og en vinkel $\alpha = \frac{\pi}{6}$ giver et resultat som på tegningen nedenfor. Prøv så at slide!

